

N° d'ordre : D.U. 1587

EDSPIC : 323

Université BLAISE PASCAL - Clermont II

**École Doctorale Sciences pour l'Ingénieur de
Clermont-Ferrand**

Thèse

Présentée

pour obtenir le grade de

Docteur d'Université

Spécialité : Mécanique du solide

par

Jean-Denis MATHIAS

**Etude du comportement mécanique de patches composites
utilisés pour le renforcement de structures métalliques
aéronautiques**

Soutenue publiquement le 30 septembre 2005 devant le jury :

| | | |
|---------------|--|--------------------|
| D. BAPTISTE | ENSAM, Paris | Président |
| J.J. BARRAU | Université Paul Sabatier, Toulouse | Rapporteur |
| A. VAUTRIN | École des Mines de Saint-Etienne | Rapporteur |
| D. COUTELLIER | ENSIAME, Valenciennes | Examineur |
| X. BALANDRAUD | IFMA, Clermont-Ferrand | Examineur |
| M. GREDIAC | Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand | Directeur de thèse |
| J.F. BEGUE | CEAT, Toulouse | Invité |

Laboratoire de Mécanique et Ingénieries,
Université Blaise Pascal et Institut Français de Mécanique Avancée

Table des matières

| | |
|---------------|----|
| Remerciements | 12 |
| Résumé | 13 |
| Abstract | 15 |
| Introduction | 17 |

I La réparation par patches composites dans l'aéronautique 22

| | |
|--|----|
| 1 La réparation par patches composites dans l'aéronautique | 23 |
| 1.1 Introduction | 23 |
| 1.2 Quelques mécanismes importants mis en jeu en réparation par patches composites | 24 |
| 1.2.1 Le phénomène de transfert d'effort substrat/patch par cisaillement de la colle | 24 |
| 1.2.2 L'optimisation de la forme du patch en zone d'ancrage | 27 |
| 1.2.3 Le pontage de fissure | 28 |
| 1.3 Quelques applications | 31 |
| 1.4 Quel renfort composite choisir ? | 34 |
| 1.4.1 Renfort riveté ou collé ? | 34 |
| 1.4.2 Quel matériau choisir ? | 34 |
| 1.5 Conclusion | 36 |

II Optimisation d'un renfort composite par algorithme génétique 37

| | |
|--|----|
| 2 Optimisation d'un patch composite par algorithme génétique. Couplage avec un code de calcul par éléments finis | 38 |
|--|----|

| | | |
|----------|---|-----------|
| 2.1 | Introduction | 38 |
| 2.2 | Vocabulaire utilisé | 39 |
| 2.3 | Fonction objectif | 41 |
| 2.4 | Opérateur de sélection | 41 |
| 2.5 | Opérateur de croisement | 43 |
| 2.6 | Opérateur de mutation | 44 |
| 2.7 | Exploration et exploitation | 45 |
| 2.7.1 | Paramètres influant sur l'exploration. | 46 |
| 2.7.2 | Paramètres influant sur l'exploitation. | 46 |
| 2.7.3 | Conclusion | 47 |
| 2.8 | Optimisation de l'empilement, de la forme et de la position d'un patch composite. | 47 |
| 2.9 | Application d'un algorithme génétique à un problème de renforcement | 49 |
| 2.9.1 | Introduction | 49 |
| 2.9.2 | Hypothèses du problème mécanique | 49 |
| 2.9.3 | Modélisation numérique par éléments finis | 51 |
| 2.9.4 | Construction de la forme du patch | 53 |
| 2.10 | Choix des opérateurs de l'AG | 55 |
| 2.10.1 | Introduction | 55 |
| 2.10.2 | Choix des opérateurs de sélection et de croisement | 56 |
| 2.10.3 | Intégration d'un nouvel opérateur : l'opérateur de translation . | 57 |
| 2.10.4 | Valeurs des paramètres | 57 |
| 2.10.5 | Résumé des choix effectués | 58 |
| 2.10.6 | Autre critère : critère de défaillance | 59 |
| 2.11 | Conclusion | 60 |
| 3 | Applications à des problèmes de renforcement | 61 |
| 3.1 | Chargements statiques | 61 |
| 3.1.1 | Fonction objectif | 61 |
| 3.1.2 | Essai de traction | 62 |
| 3.1.3 | Essai de cisaillement | 65 |
| 3.2 | Chargement cyclique | 68 |
| 3.2.1 | Fonction objectif | 68 |
| 3.2.2 | Modèle mécanique | 69 |
| 3.2.3 | Patches optimisés | 71 |
| 3.3 | Application à une voilure d'avion | 72 |
| 3.3.1 | Modèle mécanique | 72 |
| 3.3.2 | Modélisation par éléments finis | 73 |
| 3.3.3 | Fonction objectif | 74 |

| | | |
|-------|-----------------------------|----|
| 3.3.4 | Patches optimisés | 74 |
| 3.4 | Conclusion | 77 |

III Analyse théorique du renforcement de structure par matériau composite 79

| | | |
|----------|--|------------|
| 4 | Analyse bidimensionnelle du renforcement de structures | 80 |
| 4.1 | Introduction générale | 80 |
| 4.2 | Modèle mécanique | 81 |
| 4.2.1 | Hypothèses et notations | 81 |
| 4.2.2 | Plan de l'étude | 82 |
| 4.2.3 | Equations d'équilibre dans le cas bidimensionnel | 83 |
| 4.3 | Essai de traction | 84 |
| 4.3.1 | Equations d'équilibre du patch | 84 |
| 4.3.2 | Détermination de σ_{xx}^p le long de Γ_2 et Γ_4 | 88 |
| 4.3.3 | Expression analytique de σ_{xx}^p | 89 |
| 4.3.4 | Solution sur les frontières | 91 |
| 4.3.5 | Détermination de Φ_m | 92 |
| 4.3.6 | Conclusion | 97 |
| 4.4 | Essai de cisaillement | 97 |
| 4.4.1 | Equations d'équilibre | 97 |
| 4.4.2 | Résolution par une double série de Fourier | 99 |
| 4.5 | Conclusion de l'approche analytique | 101 |
| 4.6 | Approche par différences finies | 101 |
| 4.6.1 | Introduction | 101 |
| 4.6.2 | Schéma de calcul | 101 |
| 4.6.3 | Conclusion | 104 |
| 4.7 | Conclusion de l'étude | 104 |
| 5 | Applications des modèles bidimensionnels | 106 |
| 5.1 | Introduction | 106 |
| 5.2 | Traction biaxiale : comparaison de l'approche numérique et de l'approche analytique | 107 |
| 5.2.1 | Comparaison approche théorique - approche numérique | 107 |
| 5.2.2 | Analyse des distributions de contraintes | 107 |
| 5.3 | Traction uniaxiale sur un patch à 0 degré | 110 |
| 5.4 | Traction uniaxiale sur un patch à 90 degrés | 112 |
| 5.5 | Essai de cisaillement | 114 |
| 5.6 | Influence des paramètres | 115 |

| | | |
|-------|--|-----|
| 5.6.1 | Influence du coefficient de Poisson du substrat | 116 |
| 5.6.2 | Influence de l'épaisseur de la colle | 117 |
| 5.6.3 | Influence du module transversal du composite | 117 |
| 5.7 | Patchs de formes quelconques utilisés pour le renforcement de plaques trouées | 118 |
| 5.7.1 | Introduction | 118 |
| 5.7.2 | Comparaison de patchs circulaire et rectangulaire | 119 |
| 5.7.3 | Patch optimisé | 121 |
| 5.8 | Conclusion | 123 |

IV Etude expérimentale du renforcement de structure par matériau composite 125

| | | |
|----------|---|------------|
| 6 | Etude expérimentale | 126 |
| 6.1 | Introduction | 126 |
| 6.2 | Préparation des éprouvettes | 127 |
| 6.2.1 | Eprouvettes | 127 |
| 6.2.2 | Pilotage des essais | 128 |
| 6.3 | Méthode de la grille | 129 |
| 6.3.1 | Principe | 129 |
| 6.3.2 | Evaluation du champ de déformations | 131 |
| 6.3.3 | Transfert de grille | 131 |
| 6.4 | Traitement des résultats | 132 |
| 6.5 | Patchs rectangulaires | 134 |
| 6.5.1 | Patch à 0 degré | 135 |
| 6.5.2 | Patch à 90 degrés | 138 |
| 6.5.3 | Conclusion | 146 |
| 6.6 | Patchs circulaires | 146 |
| 6.6.1 | Patch à 0 degré | 147 |
| 6.6.2 | Patch à 90 degrés | 150 |
| 6.6.3 | Conclusion | 156 |
| 6.7 | Calculs des incertitudes | 157 |
| 6.7.1 | Introduction | 157 |
| 6.7.2 | Incetitudes et loi de propagation | 157 |
| 6.7.3 | Calcul d'incertitudes sur les valeurs limites | 157 |
| 6.7.4 | Applications | 159 |
| 6.8 | Patch en forme de spline | 160 |
| 6.8.1 | Champ de déplacements longitudinal u_x^p | 160 |

| | | |
|------------------------------------|---|------------|
| 6.8.2 | Champ de déplacements transversal u_y^p | 161 |
| 6.8.3 | Conclusion | 163 |
| 6.9 | Conclusion de l'étude expérimentale | 163 |
| Conclusions et perspectives | | 165 |
| Annexes | | 168 |
| Calcul de | $\frac{a}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\pi c)$ | 169 |
| Calcul de | $-\frac{a}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + b} \sin(n\pi c)$ | 172 |
| Bibliographie | | 175 |

Table des figures

| | | |
|------|--|----|
| 1 | AlphaJet E [82]. | 18 |
| 2 | Localisation des dommages de la voilure AlphaJet. | 18 |
| 1.1 | Modèle unidimensionnel d'une structure renforcée par un patch composite. | 25 |
| 1.2 | Equilibre représentatif du patch composite. | 25 |
| 1.3 | Patch composite avec une épaisseur dégressive [94]. | 28 |
| 1.4 | Diverses formes de patches composites d'après [46]. | 28 |
| 1.5 | Structure fissurée et renforcée par un patch composite [14]. | 29 |
| 1.6 | Evolution du facteur d'intensité K_1 en fonction de la longueur de fissure [14]. | 29 |
| 1.7 | Exemple d'essai sur une éprouvette fissurée et renforcée par un patch composite [9]. | 30 |
| 1.8 | Résultats d'un essai de fatigue sur une éprouvette fissurée et renforcée par un patch composite [9]. | 30 |
| 1.9 | Exemple de réparation sur un avion F 111 d'après [9]. | 32 |
| 1.10 | Exemple de réparation sur un avion Mirage d'après [9]. | 33 |
| 1.11 | Exemple de réparation sur un avion Hercules d'après [9]. | 33 |
| 1.12 | Exemples de patches riveté et collé d'après [5]. | 34 |
| 2.1 | Vocabulaire utilisé. | 40 |
| 2.2 | Principe des algorithmes génétiques [65]. | 41 |
| 2.3 | Opérateurs de sélection. | 42 |
| 2.4 | Croisement uniforme de Syswerda. | 43 |
| 2.5 | Opérateur de mutation discret. | 44 |
| 2.6 | Exemple de croisement et de mutation. | 45 |
| 2.7 | Exploration <i>versus</i> exploitation. | 45 |
| 2.8 | Variables de conception du problème d'optimisation. | 49 |
| 2.9 | Modèle mécanique du problème d'optimisation. | 50 |
| 2.10 | Discrétisation du maillage utilisé. | 52 |
| 2.11 | Evolutions théorique et numérique de la contrainte σ_{yy} suivant l'axe x | 52 |

| | | |
|------|--|-----|
| 2.12 | Construction d'une courbe spline à huit points d'interpolation. | 55 |
| 2.13 | Vue schématique d'un chromosome. | 56 |
| 2.14 | Construction des courbes splines enfants. | 57 |
| 2.15 | Description de l'algorithme génétique et des opérateurs utilisés. . . . | 58 |
| 2.16 | Résumé du chapitre 2. | 60 |
| 3.1 | Courbe de convergence dans le cas d'un essai de traction. | 63 |
| 3.2 | Structure renforcée et distribution de la contrainte de Von Mises dans l'aluminium. | 63 |
| 3.3 | Coupes de la distribution de la contrainte de Von Mises dans l'alumi- nium au milieu et en bas de la structure renforcée. | 64 |
| 3.4 | Autres patches trouvés dans le cas d'un essai de traction. | 65 |
| 3.5 | Essai de cisaillement. | 66 |
| 3.6 | Courbe de convergence dans le cas d'un essai de cisaillement. | 67 |
| 3.7 | Structure renforcée de manière optimale et distribution de la contrainte de Von Mises dans la plaque d'aluminium. | 67 |
| 3.8 | Patches optimisés dans le cas d'un essai de cisaillement. | 68 |
| 3.9 | Définition de la contrainte de cisaillement $\vec{\tau}_{ha}(t)$ | 69 |
| 3.10 | Description du problème de fatigue. | 70 |
| 3.11 | Description des cycles appliqués. | 71 |
| 3.12 | Patches optimisés dans le cas d'un chargement cyclique. | 71 |
| 3.13 | Modèle géométrique de la voilure. | 73 |
| 3.14 | Chargement et distribution de la contrainte de Von Mises dans la voilure non renforcée. | 74 |
| 3.15 | Patches optimisés avec des épaisseurs variables et distribution de la contrainte de Von Mises dans la voilure renforcée. | 75 |
| 3.16 | Patches en aluminium optimisés avec une épaisseur de 1,5 mm. | 76 |
| 3.17 | Résumé du chapitre 3. | 78 |
| 4.1 | Géométrie du patch composite. | 81 |
| 4.2 | Cas étudiés. | 82 |
| 4.3 | Equilibre d'une partie représentative du patch composite. | 84 |
| 4.4 | Résumé du chapitre 4. | 105 |
| 5.1 | Essai de traction biaxiale. | 107 |
| 5.2 | Distributions des contraintes dans le cas d'un essai de traction biaxiale : comparaison entre l'approche théorique et l'approche numérique. . . . | 108 |
| 5.3 | Essai de traction uniaxiale à 0 degré. | 110 |
| 5.4 | Distributions des contraintes dans le cas d'un essai de traction uni- axiale à 0 degré. | 111 |

| | | |
|------|--|-----|
| 5.5 | Essai de traction uniaxiale à 90 degrés. | 112 |
| 5.6 | Distributions des contraintes dans le cas d'un essai de traction uniaxiale à 90 degrés. | 113 |
| 5.7 | Essai de cisaillement. | 114 |
| 5.8 | Distributions des contraintes dans le cas d'un essai de cisaillement. . . | 115 |
| 5.9 | Influence du coefficient de Poisson du substrat. | 116 |
| 5.10 | Influence de l'épaisseur de la colle. | 117 |
| 5.11 | Influence du module transversal du composite. | 118 |
| 5.12 | Distributions des contraintes longitudinales σ_{yy}^p dans le patch composite dans les cas de renforts circulaire et carré soumis à de la traction. . . | 119 |
| 5.13 | Distributions des contraintes de cisaillement dans la colle dans les cas de renforts circulaire et carré dans le cas d'un essai de traction. . . . | 120 |
| 5.14 | Distributions des contraintes dans le composite et dans la colle dans le cas d'un patch optimisé. | 122 |
| 5.15 | Résumé du chapitre 5. | 124 |
| 6.1 | Géométrie des éprouvettes. | 127 |
| 6.2 | Éprouvette renforcée soumise à un essai de traction | 128 |
| 6.3 | Champ de déplacements $\vec{u}(M)$ | 130 |
| 6.4 | Exemple de transfert de grille pour un patch composite circulaire. . . | 132 |
| 6.5 | Zones observées par la caméra. | 135 |
| 6.6 | Résultats expérimentaux d'un patch rectangulaire dont les fibres sont orientées à 0 degré. | 137 |
| 6.7 | Exemple de lissage pour $y = cste$ | 138 |
| 6.8 | Evolutions de $L_{tx}(y)$ | 138 |
| 6.9 | Résultats expérimentaux d'un patch rectangulaire dont les fibres sont orientées à 90 degrés. | 141 |
| 6.10 | Evolutions théorique et expérimentales de la longueur de transfert longitudinale $L_{tx}(y)$ dans le cas d'un essai à 90 degrés. | 142 |
| 6.11 | Champ de déplacements transversal u_y^p dans le composite. | 144 |
| 6.12 | Champ de contraintes transversal σ_{yy}^p dans le composite dans le cas d'un essai à 90 degrés. | 144 |
| 6.13 | Champ de cisaillement transversal σ_{yz}^a dans la colle dans le cas d'un essai avec un patch dont les fibres sont orientées à 90 degrés. | 145 |
| 6.14 | Evolutions théorique et expérimentales de la longueur de transfert transversale $L_{ty}(x)$ dans le cas d'un essai à 90 degrés. | 145 |
| 6.15 | Champ de déplacements u_x^p dans le composite dans le cas où les fibres sont orientées à 0 degré. | 149 |

| | | |
|------|--|-----|
| 6.16 | Champ de contraintes σ_{xx}^p dans le composite dans le cas d'un essai à 0 degré. | 149 |
| 6.17 | Champ de contraintes σ_{xz}^a dans la colle dans le cas d'un essai à 0 degré. | 150 |
| 6.18 | Champ de déplacements u_x^p dans le composite dans le cas d'un essai à 90 degrés. | 152 |
| 6.19 | Champ de contraintes σ_{xx}^p dans le composite dans le cas d'un essai à 90 degrés. | 152 |
| 6.20 | Champ de contraintes σ_{xz}^a dans la colle dans le cas d'un essai à 90 degrés. | 153 |
| 6.21 | Champ de déplacements u_y^p dans le composite dans le cas d'un essai à 90 degrés. | 155 |
| 6.22 | Champ de contraintes σ_{yy}^p dans le composite dans le cas d'un essai à 90 degrés. | 155 |
| 6.23 | Champ de contraintes σ_{yz}^a dans la colle dans le cas d'un essai à 90 degrés. | 156 |
| 6.24 | Champ de déplacements u_x^p dans le composite dans le cas d'un patch en forme de spline. | 161 |
| 6.25 | Champ de déplacements u_y^p dans le composite dans le cas d'un patch en forme de spline. | 162 |
| 6.26 | Résumé du chapitre 6. | 164 |
| 6.27 | Fonction f | 170 |
| 6.28 | Function g | 173 |

Liste des tableaux

| | | |
|-----|--|-----|
| 1.1 | Exemples de réparations par patches composites effectuées par la RAAF d'après [3] [9]. | 31 |
| 1.2 | Propriétés mécaniques des différents matériaux. | 35 |
| 2.1 | Choix des opérateurs. | 59 |
| 5.1 | Contraintes maximales dans le cas d'un essai de traction biaxiale. . . | 109 |
| 5.2 | Contraintes maximales dans le cas d'un essai de traction à 0 degré. . | 112 |
| 5.3 | Contraintes maximales dans le cas d'un essai de traction à 90 degrés. | 114 |
| 5.4 | Contraintes maximales dans le cas d'un essai de cisaillement. . . . | 115 |
| 5.5 | Contraintes maximales dans le cas de patches carré, circulaire et en forme de spline. | 123 |
| 6.1 | Rapports des contraintes maximales avec les résistances de chacun des matériaux dans le cas d'un patch rectangulaire à 0 degré. . . . | 138 |
| 6.2 | Rapports des contraintes maximales avec les résistances de chacun des matériaux dans le cas d'un patch rectangulaire à 90 degrés. . . | 146 |
| 6.3 | Rapports des contraintes maximales avec les résistances de chacun des matériaux dans le cas d'un patch circulaire à 0 degré. | 150 |
| 6.4 | Rapports des contraintes maximales avec les résistances de chacun des matériaux dans le cas d'un patch circulaire à 90 degrés. | 156 |
| 6.5 | Incertitudes sur les données d'entrées. | 157 |
| 6.6 | Calculs d'incertitudes. | 159 |

Remerciements

Je tiens à remercier l'Atelier Industriel Aéronautique de Clermont-Ferrand, établissement DGA, pour le soutien apporté au long de ce travail de thèse : contrat d'étude n° C 05 31 026 000 et fourniture de l'ensemble des éprouvettes testées.

Je tiens également à remercier l'Agence Nationale de la VAlorisation de la Recherche (ANVAR) pour son soutien (projet jeune n° J03110014C « Renforcement de structures métalliques renforcées par patchs composites »).

Le travail d'une thèse est un travail d'équipe de trois ans qui est le fruit d'une rencontre d'un thésard, d'un directeur de thèse et d'un encadrant. C'est pour cette raison que je tiens tout d'abord à remercier Michel Grédiac pour avoir dirigé ce travail et de m'avoir fait confiance pour ce sujet de thèse. Je le remercie d'autant plus pour avoir partagé avec moi ses idées, ses connaissances ainsi que son expérience et pour m'avoir consacré beaucoup de son temps et de son énergie. Je remercie également Xavier Balandraud qui a eu pour rôle de m'encadrer. Tout comme Michel, il a lui aussi consacré beaucoup de son temps et de son énergie pour mener à terme ce travail. Enfin, je les remercie tous les deux pour le côté humain qui ont su apporter à ce travail de thèse.

Je remercie également Didier Baptiste, Jean-Jacques Barrau, Jean-Fred Bègue, Daniel Coutellier et Alain Vautrin pour avoir accepté d'être membres de mon jury de thèse.

Je tiens aussi à remercier tous les membres du LaMI et de l'IFMA que j'ai pu croiser au fil de ces trois ans.

Je remercie ma famille et mes parents qui m'ont permis de devenir ce que je suis. Enfin, je remercie ma Flo pour tout le bonheur qu'elle me donne jour après jour.

Résumé

Des patchs en matériaux composites sont classiquement utilisés dans l'aéronautique pour la réparation des structures métalliques présentant des dommages de type fissures, criques ou impacts. Une alternative à la réparation de ces structures consiste à les renforcer préventivement, avant que les défauts n'apparaissent. Le contexte de ce travail est celui de la maintenance préventive de structures métalliques aéronautiques par renforts composites, dans le but de retarder l'apparition ou la propagation de fissures.

La conception des renforts nécessite l'utilisation d'outils spécialisés pour définir les caractéristiques optimales du patch : géométrie, nombre de plis unidirectionnels, orientation des plis les uns par rapport aux autres, positionnement autour de la zone à soulager... Pour cela, un programme d'optimisation de patchs par algorithme génétique a été écrit. Il est couplé à un logiciel de calcul par éléments finis : Ansys. L'algorithme génétique mis en oeuvre a permis de déterminer des caractéristiques de patchs dont la géométrie extérieure est définie par une courbe spline fermée, ceci afin de réduire de manière optimale les contraintes mécaniques dans une zone donnée, et ce pour différents types de sollicitations.

De nombreuses défaillances des assemblages collés patch/substrat sont liées à des concentrations de contraintes dans la colle dues à l'existence d'une zone de transfert progressif d'effort du substrat vers le patch. Des approches unidirectionnelles du transfert d'effort sont classiquement utilisées dans la littérature. Elles ne tiennent cependant pas compte d'effets bidimensionnels comme la différence des coefficients de Poisson qui peut exister entre le substrat et le composite. A partir des équations d'équilibre, des modèles analytique et numérique bidimensionnels ont donc été développés. Des phénomènes de couplages bidimensionnels ont ainsi bien été mis en évidence.

Parallèlement, des essais de traction uniaxiale ont été réalisés sur des éprouvettes en aluminium renforcées par des patchs en carbone/époxyde. La méthode de la grille a été utilisée pour mesurer des champs cinématiques en surface du patch composite. Cette méthode a permis d'étudier expérimentalement le transfert des efforts entre le substrat et le renfort suivant les deux dimensions du problème et de comparer les

résultats obtenus avec les différents modèles développés au préalable.

MOTS CLES : renforcement, patch composite, algorithme génétique, modélisation, méthode de la grille

Abstract

Bonded composite patches are used as structural repairs in several fields of application such as civil engineering for damaged concrete structures or aeronautics for components which exhibit damages, defects or impacts. A similar case of application consists in using patches for the prevention of defect propagation. The present work deals with the reinforcement of metallic structures using composite patches in order to delay the damage appearance.

The proper design requires therefore the use of specific tools to define optimal characteristics of patches in terms of geometry, number of plies, ply orientations, location on the structure... A patch optimization programme based on genetic algorithms is developed in this work to reach this goal. The algorithm is associated with the ANSYS finite element package to calculate the objective function of any reinforcement configurations. The programme has been used to design several patches bonded on structures submitted to different loadings (tensile and shear tests) so as to reduce stress concentration in a given area.

Main failures are owing to stress concentrations in the adhesive due to the load transfer from the substrate to the patch. Unidimensional approaches are classically used in the literature to model the stress distribution in the adhesive, but these approaches do not account for the difference of the Poisson's ratios between both the substrate and the composite. Some numerical and analytical models have been developed from the equilibrium equations obtained along the two directions of the problem. Bidimensional coupling phenomena are observed, especially at the edges of the patch when it is rectangular.

At the same time, uniaxial tensile tests have been performed on aluminium specimens reinforced by rectangular carbon/epoxy patches. The grid method has been used to measure the displacement field on the patches. Experimental evidence of the load transfer along the two dimensions of the problem has been obtained. Measurements have been compared with the numerical and analytical models, thus pointing out some differences due to the assumptions under which models are built.

KEYWORDS : reinforcement, composite patch, genetic algorithm, modelling, grid

method

Introduction

Des préoccupations industrielles...

Mettre en place des technologies efficaces et rentables afin de réparer ou de prolonger la vie des structures aéronautiques militaires devient nécessaire dans la plupart des pays. En effet, les budgets de maintenance nécessitent des coûts de plus en plus élevés alors que dans le même temps, les budgets de la défense se rétrécissent bien souvent. L'armée de l'air australienne a été pionnière dans ce domaine étant donné la politique de maintenance des avions militaires dans ce pays. En effet, la flotte est constituée d'avions achetés à d'autres pays. De ce fait, une politique de recherche sur la maintenance de ces avions vieillissants par apport de matériaux composites extérieurs a été développée depuis déjà de nombreuses années.

En France, des préoccupations analogues font leur apparition depuis quelques années. En effet, certains appareils dont l'Alphajet (voir Figure 1) présentent des signes de vieillissement et l'introduction de matériaux composites comme renfort extérieur est envisagée. L'un des problèmes récurrents est l'apparition de criques de fatigue à l'encastrement de la voilure qui, lorsqu'elles sont significatives, provoquent la mise hors-service de ces structures. La Figure 2 représente une illustration des dommages près de l'encastrement.



FIG. 1 – Alphajet E [82].

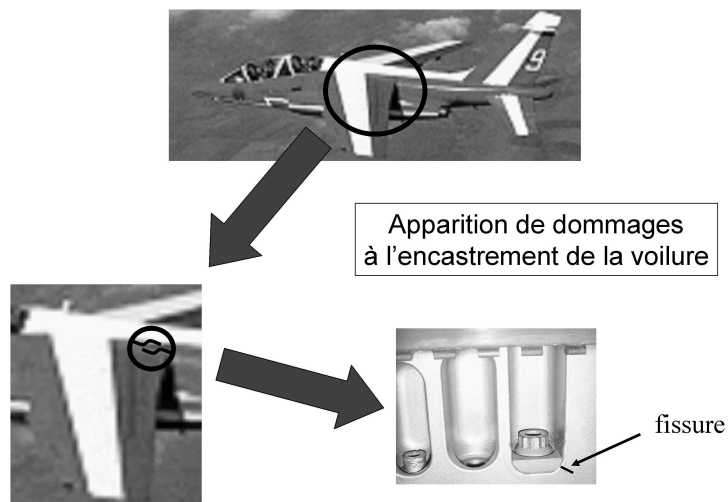


FIG. 2 – Localisation des dommages de la voilure Alphajet.

Afin de prolonger la durée de vie de telles structures, il existe plusieurs alternatives qui dépendent du niveau de ces dommages :

- si le niveau de ces criques n'est pas trop important, l'une des solutions souvent utilisée en maintenance est l'alésage de la pointe de fissure. Ceci a pour conséquence d'arrêter sa propagation ;
- si le niveau de dommages est trop important, les voilures sont tout simplement changées. C'est une solution très coûteuse car la voilure est usinée dans la masse. En effet, lors de la fabrication d'une voilure, il y a environ 95% de copeaux pour 5% de matière utile. De ce fait, l'ordre de grandeur du coût

-
- d'une voilure neuve est d'environ 1,5 million d'euros ;
 - si des fissures apparaissent dans des zones moins critiques, elles peuvent être pontées par des matériaux composites. On parle de *réparation* dans ce cas. Cette solution, souvent utilisée en maintenance aéronautique [5] [7] [45], ne peut être utilisée dans notre cas pour des raisons d'accessibilité ;
 - si les fissures ne sont pas encore apparues, une solution plus prospective est envisagée. Un patch composite peut en effet être collé à proximité de la zone endommagée afin de la renforcer de manière préventive. On parle alors de *renforcement*.

Cette dernière solution fait l'objet de la présente étude. Elle constitue la base de la réflexion qui a conduit à la proposition de ce sujet de thèse.

...aux préoccupations scientifiques

Les préoccupations scientifiques de cette thèse tournent essentiellement autour du renfort composite : quelle forme de renfort choisir ? Où placer le renfort ? Quelles orientations de fibres ? Comment estimer correctement le niveau de contraintes dans la colle ? ...

Afin de répondre à ces questions, un travail bibliographique a d'abord été réalisé. Il a mis en évidence de nombreux travaux portant sur la réparation, c'est-à-dire sur des interventions réalisées une fois le dommage apparu. Diverses méthodes existent, dont la mise en place de patchs boulonnés ou rivetés. L'inconvénient de ces méthodes réside cependant dans le champ singulier de contraintes qui apparaît dans les liaisons. Afin d'éviter les concentrations de contraintes, une solution possible consiste alors à coller un patch composite.

Ce travail de thèse consiste dans un premier temps à modéliser le renforcement de structures métalliques avec un patch composite. Ce modèle de renforcement a été implémenté dans un logiciel d'éléments finis : Ansys 7.0. Une zone à soulager est définie sur la structure à renforcer. Une partie de cette zone est dite « interdite » au patch composite au sens où il ne peut être collé à cet endroit pour cause d'accessibilité. Concrètement, cette zone peut être une zone d'accès pour la mise en place d'un boulon ou pour un contrôle de la structure.

Dans un deuxième temps, l'optimisation du renfort composite est traitée. Pour cela, il est tout d'abord crucial d'en définir l'objectif qui, dans notre cas, est la diminution du niveau de contraintes dans la zone à soulager. Une réflexion sur le critère

de renforcement a été conduite selon le type de problème rencontré (statique, cyclique). Pour l'optimisation, le principe des algorithmes génétiques a été utilisé. Une population de solutions potentielles est tout d'abord créée aléatoirement. L'évolution naturelle de cette population est ensuite simulée afin de trouver le patch composite qui soulage au mieux la zone endommagée.

Le principal résultat de ce travail est la mise en évidence de la notion de « renforcement à distance » : un patch composite collé loin de la zone à soulager peut renforcer aussi bien, voire mieux, qu'un patch collé à proximité immédiate. Ce concept repose sur la déviation globale du flux de contraintes dans la structure [52].

Les réparations par patches composites effectuées par l'armée de l'air australienne ont permis d'avoir un retour de connaissances sur les réparations effectuées avec les matériaux composites. La plupart des défaillances de ces réparations sont notamment dues à l'apparition d'un pic de cisaillement dans la colle provoquée par le transfert des efforts du substrat vers le composite. L'analyse du cisaillement dans la colle a donc fait l'objet d'une étude particulière. La littérature sur ce point précis est abondante. La majorité de ces études ont été menées avec une analyse unidimensionnelle. Cependant, des effets bidimensionnels, principalement dus à la différence des coefficients de Poisson entre le substrat et le composite, sont susceptibles d'intervenir. Le deuxième apport de cette thèse concerne donc la construction d'un modèle bidimensionnel de renforcement de structure pouvant estimer les contraintes mises en jeu dans la colle. Deux approches ont été considérées ici. La première est purement analytique mais ne s'applique qu'aux renforts de forme rectangulaire. Elle permet d'évaluer l'influence des divers paramètres géométriques et matériels du problème. La deuxième est quant à elle semi-numérique au sens où une approche par différences finies a été développée sous Matlab afin de résoudre les équations d'équilibre. Cette deuxième approche est plus lourde du point de vue numérique mais elle permet d'obtenir une évaluation des contraintes pour des renforts de formes quelconques.

La dernière partie de cette thèse est de nature expérimentale. A cet effet, une méthode de mesure de champs cinématiques sans contact est utilisée : la méthode de la grille développée par Surrel [76]. Elle permet de mesurer des champs de déplacements à la surface du patch composite. Cette partie expérimentale a plusieurs vocations. La première est de mettre en évidence les zones de transfert d'effort qui apparaissent sur des patches rectangulaires. La méthode de la grille a permis d'observer aussi bien la zone de transfert d'effort attendue que des phénomènes bidimensionnels, dus notamment à la différence des coefficients de Poisson entre le substrat et le patch composite. Le deuxième objectif est d'étudier des patches de formes diverses : circulaire ou de géométrie définie par une courbe spline fermée sensée conduire à des patches optimaux. L'influence de la géométrie du patch composite sur les distributions des déformations aussi bien dans le patch composite que dans la colle est

étudiée. Cela permet également de comparer les résultats obtenus par les approches théoriques et numériques avec les résultats expérimentaux. Le dernier objectif est la comparaison des résultats calculés par le modèle par éléments finis de l'algorithme génétique développé dans la deuxième partie avec les résultats expérimentaux. Il est ainsi possible de quantifier l'influence des hypothèses mécaniques effectuées pour construire le modèle utilisé dans le programme d'optimisation. Les résultats obtenus ont permis d'établir une comparaison avec les champs de déplacements calculés par le modèle éléments finis mis en place dans la deuxième partie, et de souligner les écarts dus aux hypothèses utilisées, en particulier celles qui concernent le transfert d'effort du substrat vers le patch.

Première partie

La réparation par patchs composites dans l'aéronautique

Chapitre 1

La réparation par patchs composites dans l'aéronautique

1.1 Introduction

Le contexte de cette thèse s'inscrit dans un contexte de maintenance de structures aéronautiques, le but étant de retarder l'apparition de fissures en renforçant préventivement les structures endommagées. Très peu d'études concernent le renforcement préventif. De ce fait, des travaux antérieurs sur la réparation par patchs composites ont servi de point de départ. Ce chapitre, non exhaustif, a pour but de présenter quelques-uns de ces travaux menés dans le domaine de la maintenance aéronautique afin de réparer des structures endommagées avec des matériaux composites. En effet, grâce à leurs propriétés mécaniques spécifiques élevées et à leur diversité, les matériaux composites sont de plus en plus utilisés pour réparer des structures aéronautiques vieillissantes. Leurs applications ont notamment connu un essor à la fin des années 70 [5].

Dans un premier temps, quelques travaux sur la réparation par patchs composites sont présentés afin de cerner les principaux mécanismes entrant en jeu. Dans un deuxième temps, des exemples d'application illustrent la pertinence du choix des matériaux composites pour réparer des zones endommagées. Finalement, une discussion sur le choix du composite utilisé est conduite dans le dernier paragraphe.

1.2 Quelques mécanismes importants mis en jeu en réparation par patchs composites

1.2.1 Le phénomène de transfert d'effort substrat/patch par cisaillement de la colle

De nombreuses études ont été consacrées à l'étude théorique des contraintes dans le patch composite et dans la colle [38] [91] [29] [2] [58] [35] [34] [86] car cette dernière est souvent le point faible dans une réparation. En effet, elle est souvent à l'origine des défaillances du patch composite [21] car c'est sa rupture ou sa décohésion qui provoque le détachement du renfort composite. L'étude classique d'une structure renforcée et soumise à un essai de traction est ici rappelée.

Une telle structure est ici considérée (voir Figure 1.1). Les notations suivantes sont utilisées :

- l_x représente la longueur du patch composite ;
- e_p , e_s et e_a représentent les épaisseurs du patch, du substrat et de la colle ;
- σ_{xx}^p et σ_{xx}^s représentent les contraintes longitudinales suivant x du patch composite et du substrat respectivement ;
- σ_{xz}^a représente la contrainte de cisaillement de la colle ;
- σ_{xx}^∞ représente la contrainte longitudinale appliquée au substrat ;
- E_x et E_s représentent les modules de Young du patch et du substrat ;
- G_a représente le module de cisaillement de la colle.

Le comportement des trois matériaux est supposé linéaire élastique. Les contraintes des trois matériaux ne dépendent que de la direction x .

La Figure 1.1 représente les principaux mécanismes qui entrent en jeu lors du renforcement d'une structure par matériaux composites. La contrainte longitudinale dans le patch σ_{xx}^p n'est pas maximale dès le bord libre. En effet, elle est égale à 0 sur les bords libres puis augmente progressivement jusqu'à atteindre une contrainte limite loin de ces derniers. On parle alors de *transfert d'effort*. La contrainte de cisaillement dans la colle σ_{xz}^a présente quant à elle un pic de cisaillement près du bord libre. Elle est nulle sur ce dernier du fait des conditions aux limites. Afin de simplifier les calculs, une hypothèse souvent employée dans la littérature est de considérer que cette contrainte de cisaillement est maximale aux bords libres. Le calcul du transfert d'effort est un point qui a été souvent examiné dans la littérature [91] [38] [29] [2]. Les principaux résultats de ces études sont rappelés ici. Le modèle est développé suivant la direction x . La Figure 1.2 représente l'équilibre représentatif du patch composite.

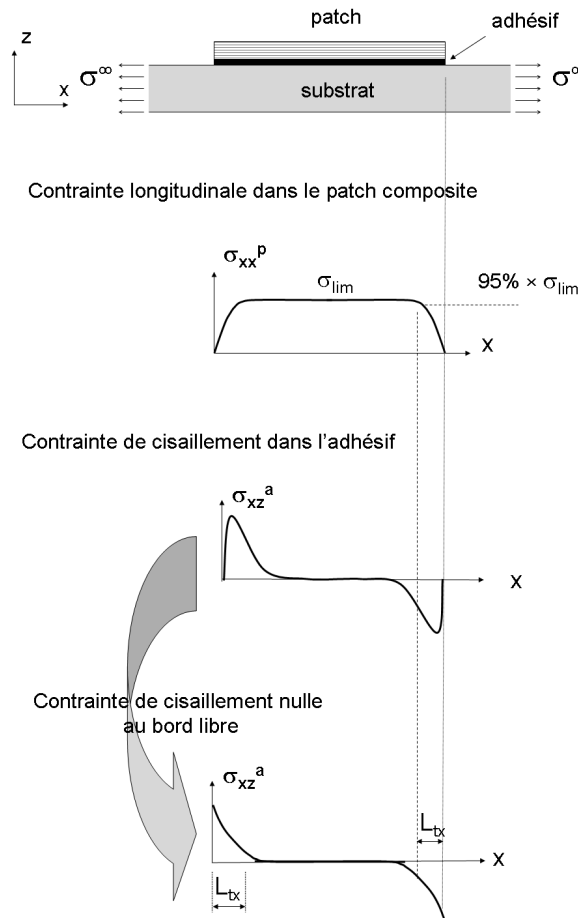


FIG. 1.1 – Modèle unidimensionnel d'une structure renforcée par un patch composite.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} z \\ \uparrow \\ \text{---} x \end{array} \\
 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} -\sigma_{xx}^p \\ -\sigma_{xz}^p \end{pmatrix} e_p \quad \boxed{\phantom{\text{patch}}} \quad \begin{pmatrix} \sigma_{xx}^p + \frac{\partial \sigma_{xx}^p}{\partial x} dx \\ \sigma_{xz}^p + \frac{\partial \sigma_{xz}^p}{\partial x} dx \end{pmatrix} e_p \\
 \begin{pmatrix} -\sigma_{xz}^a \\ -\sigma_{zz}^a \end{pmatrix} dx
 \end{array}$$

FIG. 1.2 – Equilibre représentatif du patch composite.

L'équation différentielle qui en résulte régit le comportement du renfort :

$$\frac{d^2 \sigma_{xx}^p}{dx^2} - \xi \sigma_{xx}^p = \chi \quad (1.1)$$

avec :

$$\begin{cases} \xi = \frac{G_a}{e_a} \left(\frac{1}{e_p E_x} + \frac{1}{e_s E_s} \right) \\ \chi = -\frac{G_a}{e_a e_p E_s} \sigma_{xx}^\infty \end{cases} \quad (1.2)$$

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\begin{cases} \sigma_{xx}^p(0) = 0 \\ \sigma_{xx}^p(l_x) = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

La solution de l'Equation (1.1) peut s'écrire comme une combinaison de cosh et de sinh :

$$\sigma_{xx}^p(x) = C_1 \cosh(\sqrt{\xi}x) + C_2 \sinh(\sqrt{\xi}x) - \frac{\chi}{\xi} \quad (1.4)$$

Avec les conditions aux limites précédentes, C_1 et C_2 peuvent être calculées. σ_{xx}^p s'écrit finalement :

$$\sigma_{xx}^p(x) = \frac{\chi}{\xi} [\cosh(\sqrt{\xi}x) + \left(\frac{1 - \cosh(\sqrt{\xi}l_x)}{\sinh(\sqrt{\xi}l_x)} \right) \sinh(\sqrt{\xi}x)] - \frac{\chi}{\xi} \quad (1.5)$$

La contrainte est égale à 0 au bord libre puis augmente exponentiellement jusqu'à atteindre une valeur limite loin de ce dernier. La contrainte dans le patch composite atteint 95% de sa valeur limite au bout d'une longueur L_{tx} dite longueur de transfert qui est égale à :

$$L_{tx} \simeq \frac{3}{\sqrt{\xi}} \quad (1.6)$$

La contrainte de cisaillement dans la colle $\sigma_{xz}^a(x)$ est calculée avec l'Equation (1.7) :

$$\sigma_{xz}^a(x) = e_p \frac{d\sigma_{xx}^p}{dx} \quad (1.7)$$

Soit :

$$\sigma_{xz}^a(x) = e_p \frac{\chi}{\sqrt{\xi}} [\sinh(\sqrt{\xi}x) + (\frac{1 - \cosh(\sqrt{\xi}l_x)}{\sinh(\sqrt{\xi}l_x)}) \cosh(\sqrt{\xi}x)] \quad (1.8)$$

L'expression de la contrainte de cisaillement $\sigma_{xz}^a(x)$ dans la colle constitue un point important lors de l'étude du renforcement par patchs composites. La distribution du déplacement longitudinal du composite $u_x^p(x)$ peut être aussi déduite de l'Equation (1.8) :

$$u_x^p(x) = \frac{\chi}{\sqrt{\xi^3} E_x} [\sinh(\sqrt{\xi}x) + (\frac{1 - \cosh(\sqrt{\xi}l_x)}{\sinh(\sqrt{\xi}l_x)}) \cosh(\sqrt{\xi}x)] - \frac{\chi}{\xi E_x} x \quad (1.9)$$

Les principaux résultats théoriques ont été rappelés. Ils constituent une base de réflexion importante afin d'appréhender les mécanismes liés au renforcement de structure par patchs composites. Cette approche théorique repose toutefois sur des hypothèses simplificatrices qui permettent de calculer les distributions de contraintes dans le patch composite et dans la colle. Il faut donc indiquer que d'autres travaux, cette fois-ci numériques et non rappelés ici, ont été conduits afin de pouvoir calculer plus précisément l'état de contrainte dans le joint collé.

1.2.2 L'optimisation de la forme du patch en zone d'ancrage

Certaines études ont été réalisées sur la forme du bord libre du patch pour limiter le pic de contrainte de cisaillement dans la colle [94]. Ces travaux ont pour but d'évaluer l'influence de la forme des bords libres du patch composite sur la diminution de ces pics (voir Figure 1.3). Xiong et Raizenne [94] ont montré que des patchs présentant une épaisseur dégressive amoindrissaient les contraintes dans la colle car la singularité géométrique est alors moins marquée. Ils ont par exemple optimisé l'angle et la longueur de la diminution d'épaisseur du patch composite. D'autres travaux ont été menés sur l'optimisation de la forme du patch composite [46]. La Figure 1.4 présente ainsi plusieurs formes de patchs étudiées [46]. Ces travaux ont montré que les patchs composites arrêtaient au mieux la propagation des fissures sont les patchs composites en forme d'étoile.

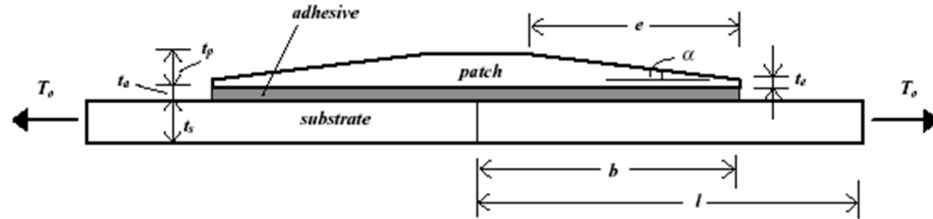
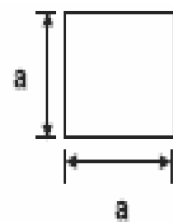
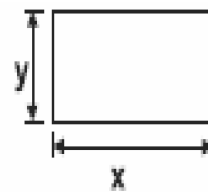


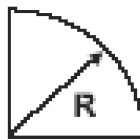
FIG. 1.3 – Patch composite avec une épaisseur dégressive [94].



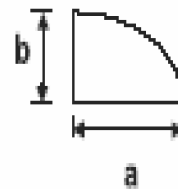
Patch carré



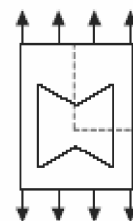
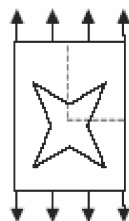
Patch rectangulaire



Patch circulaire



Patch elliptique



Patchs en forme d'étoile

FIG. 1.4 – Diverses formes de patchs composites d'après [46].

1.2.3 Le pontage de fissure

Plusieurs études numériques ont été effectuées afin d'analyser le comportement des structures réparées par patchs composites. Ces patchs viennent se coller sur la

zone endommagée afin de ponter des fissures existantes. De nombreux travaux ont été menés sur ce sujet [14] [7] [8]. La Figure 1.5 montre une structure fissurée et renforcée par un patch composite et le maillage associé au modèle mécanique. Le but de cet exemple est d'étudier l'influence du patch composite sur la propagation de la fissure.

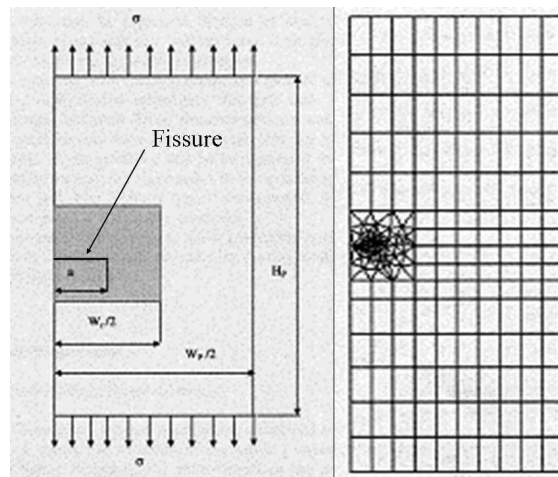


FIG. 1.5 – Structure fissurée et renforcée par un patch composite [14].

Le patch composite a pour conséquence de rigidifier la structure et de retarder la propagation de la fissure. La Figure 1.6 représente le facteur d'intensité K_I en fonction de la longueur de fissure pour une éprouvette avec patch, puis sans patch.

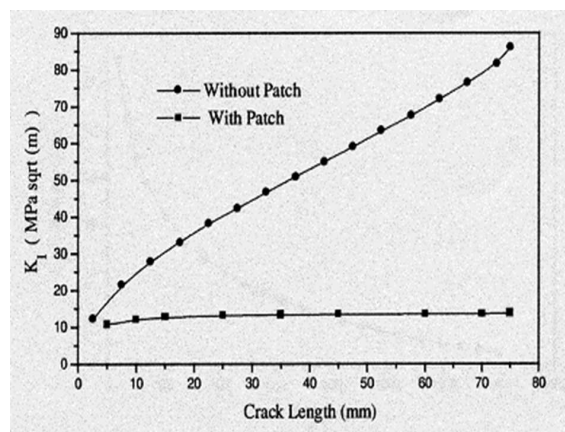


FIG. 1.6 – Evolution du facteur d'intensité K_I en fonction de la longueur de fissure [14].

Le patch composite a tendance à diminuer nettement K_I par rapport à une structure non renforcée, ce qui prolonge ainsi la durée de vie de la structure.

Afin de valider ou non des modèles théoriques ou numériques, plusieurs études expérimentales sur la réparation par patchs composites ont été effectuées. La Figure

1.7 représente un essai classique tiré de la littérature [9]. Cet essai consiste à étudier le comportement en fatigue d'une structure fissurée, puis renforcée par un patch composite.

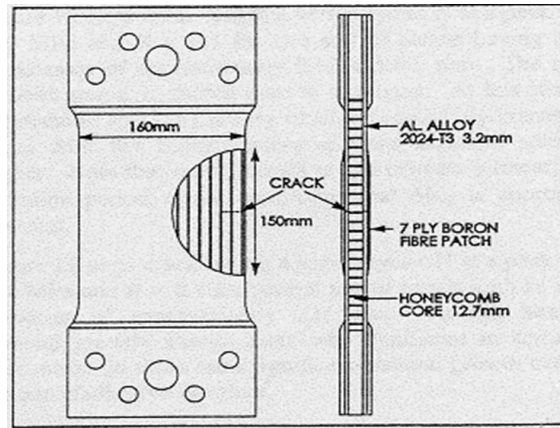


FIG. 1.7 – Exemple d'essai sur une éprouvette fissurée et renforcée par un patch composite [9].

La Figure 1.8 représente des résultats typiques issus de cette étude expérimentale. Elle représente le logarithme du rapport de l'incrément de la longueur de fissure da sur l'incrément du nombre de cycles dN en fonction du logarithme du facteur d'intensité K .

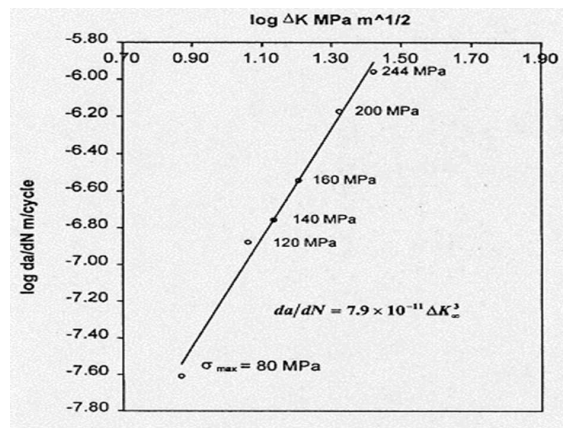


FIG. 1.8 – Résultats d'un essai de fatigue sur une éprouvette fissurée et renforcée par un patch composite [9].

Ces résultats montrent la linéarité du phénomène représenté sur la Figure 1.8. Cette figure permet ainsi de calculer le coefficient de proportionnalité qui existe dans le cas d'une structure renforcée. D'autres travaux expérimentaux ont été réalisés afin d'évaluer la zone de transfert d'effort et de comparer les résultats trouvés avec les résultats théoriques du paragraphe 1.2.1. La plupart de ces travaux ont utilisé des

jauges de déformation afin d'obtenir la distribution des déformations en surface du patch composite [28] par exemple.

Les mécanismes de base sur le transfert d'effort du substrat vers le composite ont été présentés. Le paragraphe suivant présente quelques applications concrètes de l'utilisation de patchs composites pour prolonger la durée de vie de plusieurs types d'avions.

1.3 Quelques applications

Le but de ce paragraphe est de présenter quelques exemples d'application de patchs composites visant à réparer des structures aéronautiques. Dans les années 70, la RAAF (Royal Australian Air Force) a décidé de développer l'utilisation des matériaux composites afin de renforcer des structures aéronautiques. L'AMRL (Aeronautical and Maritime Research Laboratory) a utilisé avec succès des renforts composites bore/époxyde afin de parer des problèmes de corrosion et de fatigue. Le Tableau 1.1 résume les principaux travaux effectués [3] [9].

| Avion | Type de dommages | Commentaires |
|----------|------------------|---|
| Hercules | Corrosion | Plus de 400 réparations depuis 1975 |
| Macchi | Fatigue | Durée de vie au moins doublée |
| Mirage | Fatigue | Plus de 180 réparations depuis 1979 |
| Nomad | Corrosion | Plus de 105 000 heures de vols simulées |
| F 111 | Corrosion | En service depuis 1980 |

TAB. 1.1 – Exemples de réparations par patchs composites effectuées par la RAAF d'après [3] [9].

En Australie, l'utilisation de patchs composites est devenue une opération classique afin de réparer des zones endommagées par la fatigue ou la corrosion. Les Figures 1.9, 1.10, 1.11 en montrent quelques exemples. Sur la Figure 1.9, l'avion représenté est un F 111. Le dommage est localisé sur un panneau situé sous l'une des ailes de l'avion. La particularité de cette réparation est qu'au lieu de venir renforcer la zone endommagée, la pièce a été directement substituée par une pièce composite graphite/époxyde.

L'exemple qui suit est plus classique et concerne le Mirage III. Des fissures dues à la fatigue apparaissent sur un accès au réservoir. La Figure 1.10 représente les dommages ainsi que le patch composite utilisé. Des essais de fatigue ont été effectués et ont montré que le patch composite diminuait fortement la propagation des fissures

déjà présentes [9]. Cette solution a été validée par la RAAF et plus de 180 avions Mirage ont été réparés par cette procédure.

Le dernier exemple concerne un endommagement dû cette fois-ci à la corrosion et concerne l'avion Hercules. Les dommages ainsi que le patch composite sont situés à l'intérieur de l'aile (voir Figure 1.11). Cet exemple est intéressant du fait de sa mise en oeuvre pratique. La procédure de réparation antérieure consistait à riveter des plaques d'aluminium sur la partie endommagée. Elle nécessitait l'intervention d'un ouvrier pendant six jours. L'utilisation de patchs composites a été intégrée aux processus de réparation. Une fois cette intégration effectuée, cette nouvelle procédure n'utilisait qu'un seul ouvrier pendant une journée, d'où un gain important de temps et d'argent.

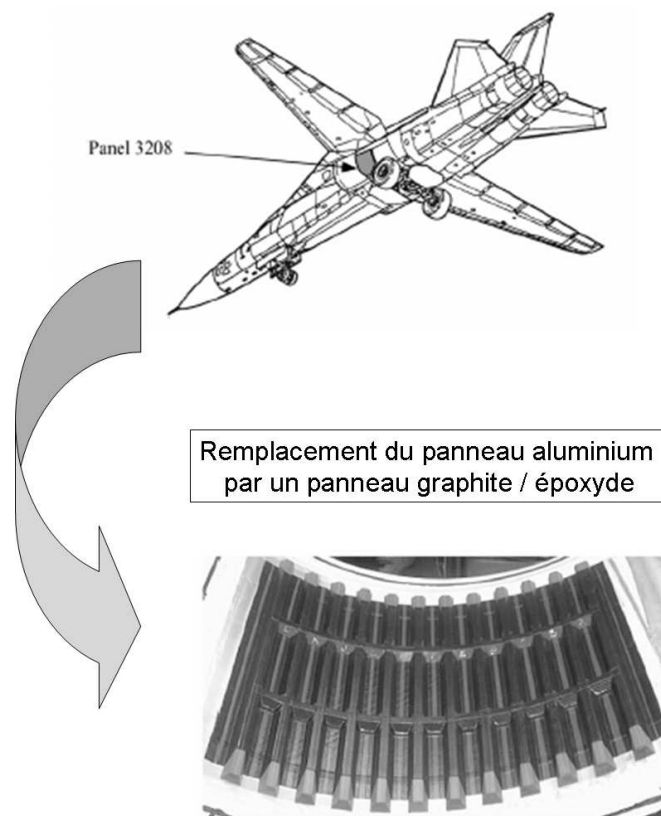


FIG. 1.9 – Exemple de réparation sur un avion F 111 d'après [9].

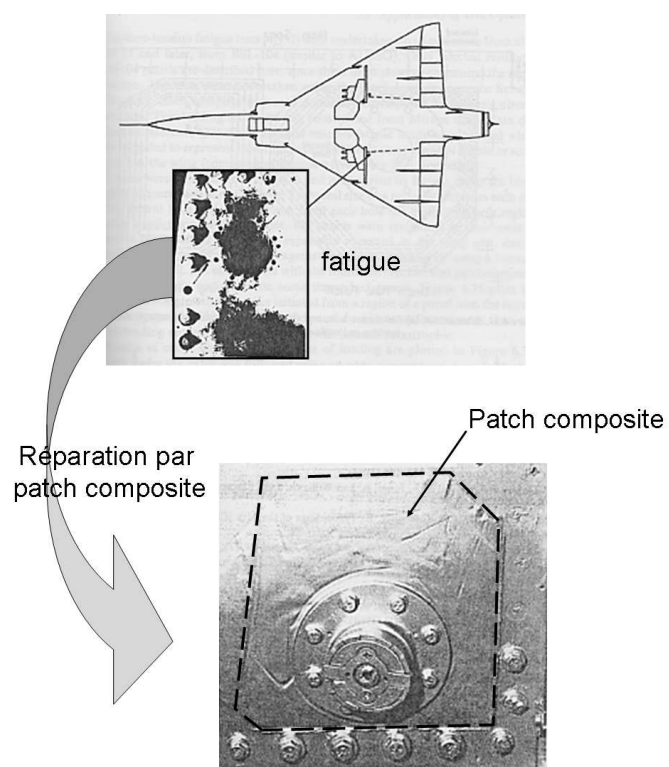


FIG. 1.10 – Exemple de réparation sur un avion Mirage d'après [9].

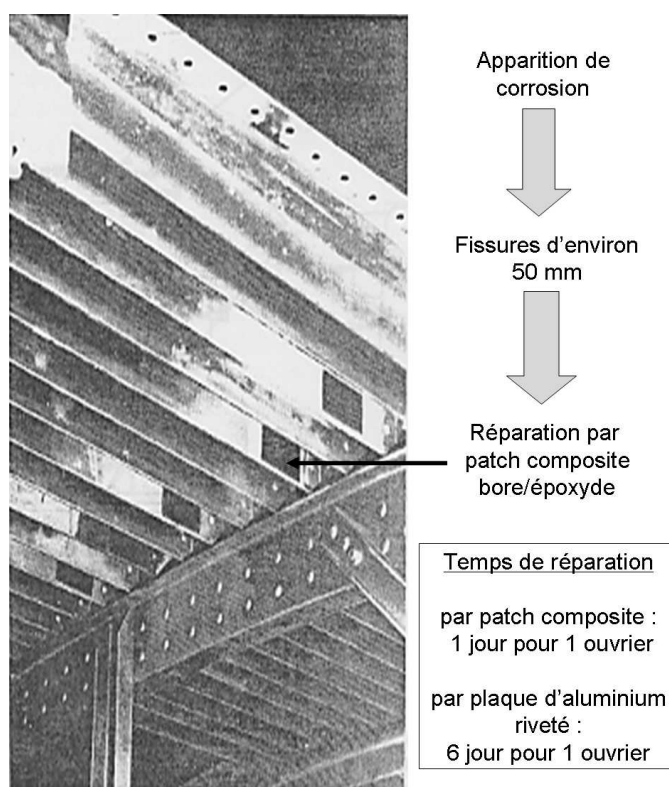


FIG. 1.11 – Exemple de réparation sur un avion Hercules d'après [9].

1.4 Quel renfort composite choisir ?

1.4.1 Renfort riveté ou collé ?

La question de l'utilisation de patchs rivetés ou collés est ici examinée. La Figure 1.12 présente les deux types de patchs, l'un étant riveté, l'autre collé.

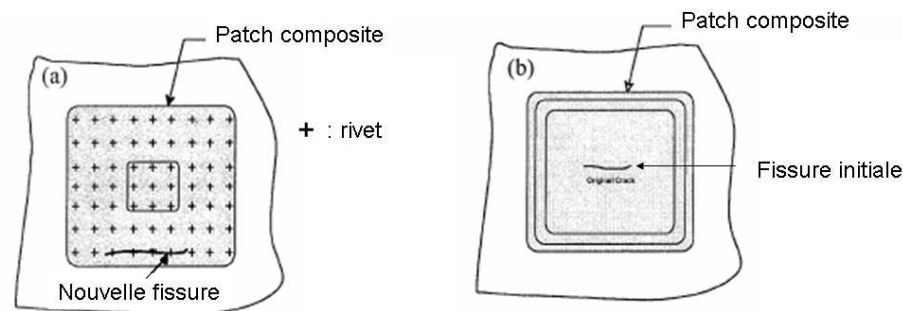


FIG. 1.12 – Exemples de patchs riveté et collé d'après [5].

Le patch collé présente de nombreux avantages par rapport aux patchs rivetés [5] :

- les patchs collés n'entraînent pas de concentrations de contraintes, contrairement aux patchs rivetés ;
- il est plus facile de contrôler les propagations de fissures avec un patch collé qu'avec un patch riveté ;
- il existe moins de risque de corrosion avec des patchs collés ;
- la propagation des fissures est plus importante près des bords avec des patchs rivetés ;
- le renforcement créé est plus efficace avec un patch collé.

Au vu de ces résultats, l'utilisation de patchs collés a été préférée à l'utilisation de patchs rivetés.

1.4.2 Quel matériau choisir ?

Le choix du renfort est une question sensible. Les deux types de renfort principalement utilisés dans l'aéronautique sont de type carbone/époxyde [31] et bore/époxyde [8]. La RAAF a employé ce dernier type de renfort avec succès dans les années 80 [9]. En France, il est actuellement interdit d'utiliser des fibres de bore qui est cancérigène. La DGA a, pour le moment, opté pour un renfort de type carbone/époxyde dans ses études préliminaires. Ce type de composite sera donc utilisé dans la suite du

document pour les applications ainsi que pour l'étude expérimentale. Le principal désavantage de ce type de renfort est que son coefficient de dilatation est très faible dans le sens des fibres ($2,25 \cdot 10^{-8} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$), ce qui peut provoquer des contraintes d'origine thermique assez importantes. Il faut noter cependant que la plupart des résultats obtenus dans le cadre de cette thèse pourraient facilement être adaptés à des patchs d'une autre nature. Pour des raisons de fabrication, l'orientation des plis est généralement comprise parmi quatre valeurs : 0, 45, -45, 90 degrés.

Le substrat à renforcer est de l'aluminium 2024 T3. Deux types de colle permettant de solidariser le renfort au substrat sont utilisés en pratique : la colle FM et la colle Redux. Dans notre cas, c'est la colle Redux 312 qui est utilisée. Les caractéristiques des différents matériaux sont rappelées dans le Tableau 1.2.

| | Composite | Aluminium | Colle |
|----------------|-----------|-----------|-------|
| E_x (GPa) | 141 | 72 | 4.2 |
| E_y (GPa) | 10 | - | - |
| ν_{xy} | 0,28 | 0,32 | 0,3 |
| G_{xy} (GPa) | 7 | - | - |
| X (MPa) | 1786 | 440 | 70 |
| X' (MPa) | 1000 | - | - |
| Y (MPa) | 42 | - | - |
| Y' (MPa) | 150 | - | - |
| S (MPa) | 80 | - | - |

TAB. 1.2 – Propriétés mécaniques des différents matériaux.

où X , X' , Y , Y' , S représente les contraintes de rupture classiques des matériaux composites [13].

Afin d'évaluer la défaillance du renfort, le critère de Tsai-Wu [13] (voir Equation (1.10)) est utilisé pour le composite et le critère de Von Mises (voir Equation (1.11)) est utilisé pour l'aluminium et la colle. Ces deux critères permettront de quantifier la défaillance de l'un des trois matériaux tout au long du document. Ils s'écrivent respectivement :

$$\left(\frac{1}{X} - \frac{1}{X'}\right)\sigma_{xx}^p + \left(\frac{1}{Y} - \frac{1}{Y'}\right)\sigma_{yy}^p + \frac{\sigma_{xx}^{p\ 2}}{XX'} + \frac{\sigma_{yy}^{p\ 2}}{YY'} + \frac{\sigma_{xy}^{p\ 2}}{S^2} - \frac{\sigma_{xx}^p \sigma_{yy}^p}{XX'} \leq 1 \quad (1.10)$$

pour le critère de Tsai-Wu et

$$(\sigma_{xx}^s - \sigma_{yy}^s)^2 + \sigma_{xx}^{s\ 2} + \sigma_{yy}^{s\ 2} + 6(\sigma_{xz}^{s\ 2} + \sigma_{yz}^{s\ 2}) \leq 2\sigma_e^2 \quad (1.11)$$

pour le critère de Von Mises, où σ_e représente la contrainte limite en traction, σ_{ij}^p les contraintes dans les plis du patch et σ_{ij}^s les contraintes dans le substrat.

1.5 Conclusion

Les principaux résultats des travaux menés sur la réparations par patchs composites ont été rappelés très brièvement. Ces travaux permettent d'appréhender les mécanismes qui entrent en jeu lorsqu'une structure est réparée par un patch composite. Ils ont servi de point de départ pour développer des modèles et des méthodes existantes qu'ils soient théoriques, numériques ou expérimentaux.

Il existe cependant des différences entre les travaux cités et le présent travail. Les patchs composites ont été utilisés jusqu'à présent après l'apparition des fissures, que ce soit pour le Mirage, le F111 ou l'Hercules. Dans notre cas, les fissures ne sont pas encore apparues. Le but de ce travail de thèse n'est donc pas de réparer des structures fissurées mais de retarder l'apparition de ces fissures en renforçant préventivement la structure. C'est ce qui distingue le présent travail de la plupart des études sur les patchs composites publiées dans la littérature.

Dans les chapitres suivants, le travail porte principalement sur l'optimisation des patchs en termes de forme et d'orientation des plis ainsi que sur le transfert d'effort entre le substrat et le patch composite.

Deuxième partie

Optimisation d'un renfort composite par algorithme génétique

Chapitre 2

Optimisation d'un patch composite par algorithme génétique. Couplage avec un code de calcul par éléments finis

2.1 Introduction

Après cet examen rapide de la bibliographie existante sur la réparation par patchs composites, examinons maintenant en détail la question de l'optimisation des patchs, tant sur le plan de la forme que sur celui des séquences d'empilement, qui sera utilisée dans le présent travail pour le renforcement des voilures.

Il existe de nombreuses méthodes qui permettent de résoudre un problème d'optimisation. Ces méthodes peuvent se scinder en deux groupes : les méthodes dites déterministes, et les méthodes dites non-déterministes. Les méthodes déterministes, comme celle du gradient, sont propices à une recherche d'optimum local mais ne permettent pas de sortir des puits pour rechercher un optimum global. Les méthodes non-déterministes, comme celle de Monte-Carlo, permettent d'éviter une convergence vers un optimum local. Cependant, elles ne permettent pas une recherche locale efficace. De surcroît, la plupart de ces méthodes ne permettent pas une optimisation de problèmes dépendant de variables discrètes. De ce fait, les algorithmes génétiques (AGs) offrent de nombreux avantages par rapport aux méthodes classiques d'optimisation :

- l'optimisation de structure composite comporte de nombreux optima locaux [59]. Les AGs peuvent sortir de ces optima locaux afin de converger vers un optimum global ;
- les AGs ne donnent pas une solution unique. En effet, une famille de solutions

est obtenue, ce qui permet d'atteindre plusieurs optima. Cette particularité a pour conséquence de conduire à une optimisation riche en solutions potentielles. Elle permet également d'intégrer des contraintes en post-traitement qui ne peuvent pas être prises en compte directement dans l'AG ;

- les AGs permettent aussi bien l'optimisation de problèmes dépendant de variables discrètes que de variables continues.

L'optimisation par AG résulte de l'observation de l'évolution naturelle. Darwin [20] établit la théorie sur l'origine des espèces avec son principe « survival of the fittest » : les plus adaptés survivent. Il montre notamment que l'apparition de nouvelles espèces s'obtient grâce à la sélection naturelle. Ces espèces apparaissent et survivent suivant leur capacité à s'adapter à leur environnement. Mendel (1822-1884) intègre par la suite les notions nécessaires (croisement, mutation) afin d'expliquer les mécanismes de l'évolution naturelle. Dans les années 60, ce paradigme est devenu un outil d'optimisation.

Ces algorithmes sont basés sur des opérateurs qui simulent l'évolution d'une population. Ils ont été utilisés avec succès dans divers domaines tels que l'optimisation d'emploi du temps, de contrôle de systèmes industriels [12], de réseaux d'antennes [69] ou encore de commutateurs optiques adiabatiques [55]. Ils ont aussi été utilisés dans le domaine de la mécanique, notamment pour l'optimisation de dimensionnement de structures composites stratifiées [72] [70].

Le but de ce chapitre est d'appliquer les AGs afin d'optimiser l'orientation des plis et la forme d'un patch composite dans un contexte de renforcement de structures métalliques. Les notions liées au fonctionnement des AGs sont présentées dans un premier temps. Une littérature abondante existe sur le sujet et seules les notions principales sont donc présentées dans ce document. Ensuite, les variables de conception du problème d'optimisation d'un patch composite sont décrites afin de les intégrer dans un AG. Un code de calcul par éléments finis est utilisé afin d'évaluer la qualité des renforts. Son couplage avec un AG est présenté à la fin de ce chapitre.

2.2 Vocabulaire utilisé

Le vocabulaire utilisé dans le cadre d'optimisation par AG est ici présenté. Afin d'illustrer les définitions et les concepts, l'exemple d'optimisation suivant est considéré :

Soit un rectangle de longueur L et de largeur l à optimiser, de manière à obtenir la plus grande surface pour un périmètre fixé p . Ce problème d'optimisation s'écrit :

maximiser

$$f(L, l) = L \times l \quad (2.1)$$

avec

$$L + l = p \quad (2.2)$$

C'est un problème simple d'optimisation sous contrainte qui a pour solution $L = l = \frac{p}{2}$. La Figure 2.1 représente le vocabulaire utilisé. Une *population* initiale (ensemble des rectangles) constituée d'*individus* (rectangles) est ici considérée. Chaque individu est constitué de *chromosomes*. Ces chromosomes contiennent tous les *gènes* (longueur L et largeur l) qui caractérisent chaque individu. Chaque gène est codé en *bits*. Par exemple, $l=0,877$ est codé en 0111001.

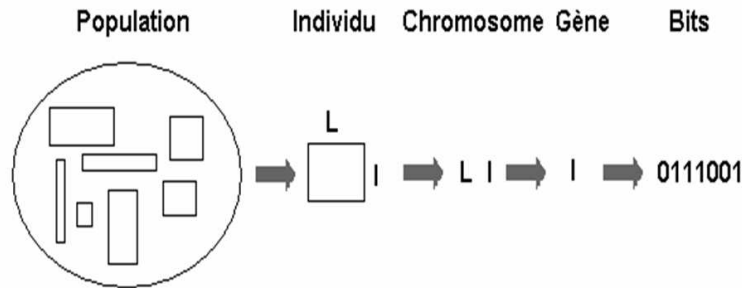


FIG. 2.1 – Vocabulaire utilisé.

Plusieurs opérateurs sont appliqués sur ces individus afin de faire évoluer cette population :

- la *génèse* donne naissance à la première *génération* d'individus qui sont tirés aléatoirement ;
- l'opérateur de *sélection* permet de choisir les meilleurs individus selon une *fonction objectif* qui est liée à la pertinence de l'individu. Dans notre exemple, cette fonction objectif est l'aire de chaque rectangle. Les individus sélectionnés sont appelés *parents* ;
- l'opérateur de *croisement* a pour but de créer de nouveaux individus à partir des individus parents. Ces nouveaux individus sont des individus *enfants* dont les caractéristiques sont celles d'un ou plusieurs parents ;
- l'opérateur de *mutation* mute aléatoirement l'une des caractéristiques d'un individu enfant. Il crée une diversité génétique au sein de la population afin d'explorer de nouvelles solutions.

La population évolue ainsi jusqu'à la convergence de l'AG (voir Figure 2.2). Chacun de ces opérateurs constitue une étape importante de l'AG. Ils sont présentés plus en détails dans les paragraphes suivants.

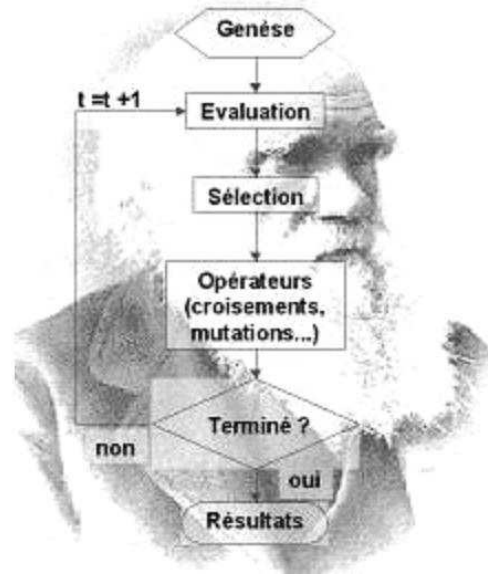


FIG. 2.2 – Principe des algorithmes génétiques [65].

2.3 Fonction objectif

Comme tout problème d'optimisation, il est nécessaire de bien définir l'objectif à atteindre. Pour cela, une *fonction objectif* f_i est définie. Cette fonction est liée à l'objectif à atteindre (ici, l'objectif est d'obtenir la plus grande surface et correspond à $f(L, l)$). Afin de rendre plus pertinente la comparaison des valeurs obtenues, une *fonction d'adaptation* F_i , liée à la fonction f_i , est introduite. Cette fonction d'adaptation peut être s'écrire :

$$F_i = C - f_i \quad (2.3)$$

C est une constante assez petite afin de permettre une bonne comparaison entre les individus d'une génération donnée et assez grande pour éviter d'avoir une fonction d'adaptation négative. Elle est telle que :

$$C = f_{max} \quad (2.4)$$

f_{max} représente la valeur maximale de la fonction objectif à chaque génération, comme suggéré dans [49]. Cette valeur maximale correspond à la fonction objectif du pire individu à chaque génération. L'AG maximise donc la fonction d'adaptation F_i et minimise la fonction objectif f_i .

2.4 Opérateur de sélection

Chaque opérateur de sélection présenté est basé sur la fonction d'adaptation F_i . L'*opérateur de sélection* dite *proportionnelle* consiste à associer à chaque individu

une probabilité de survie P_i^s calculée à partir de sa fonction d'adaptation F_i :

$$P_i^s = \frac{F_i}{\sum_{j=1}^{n_i} F_j} \quad (2.5)$$

La variable n_i correspond au nombre d'individus de la génération considérée. Cet opérateur de sélection a pour effet de favoriser les meilleurs individus, mais aussi de donner une chance de survie à de moins bons individus, conservant ainsi une certaine diversité génétique à la prochaine génération.

L'*opérateur de sélection par tournoi* consiste à organiser plusieurs tournois à chaque génération. n individus sont confrontés aléatoirement à chaque tournoi. Le meilleur de ces n individus survit et les autres meurent. Ainsi, pour qu'un individu *a priori* faible survive, il faut qu'il soit dans un tournoi qui ne réunisse que des individus plus faibles que lui.

Afin d'assurer la convergence de l'AG, l'*opérateur de sélection dite élitiste* est souvent utilisé : à chaque génération, les meilleurs individus sont sélectionnés comme parents. De plus, ils sont remis dans la génération suivante, ce qui peut s'assimiler à un clonage.

La Figure 2.3 illustre les différents opérateurs de sélection. L'opérateur de sélection

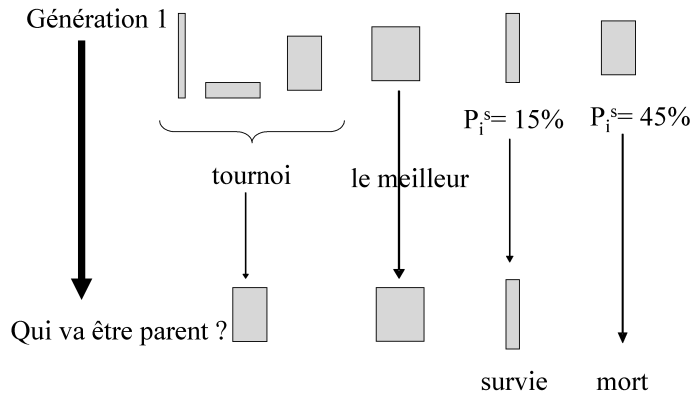


FIG. 2.3 – Opérateurs de sélection.

par tournoi est appliqué sur les trois premiers rectangles. Le meilleur des trois (le troisième rectangle) est sélectionné pour être parent. Le meilleur individu est automatiquement choisi pour être parent avec l'opérateur de sélection élitiste. Enfin, lorsque la sélection des individus se fait avec l'opérateur de sélection proportionnelle, les individus moins bons peuvent parfois survivre. En effet, dans cet exemple, l'avant

dernier rectangle qui a une probabilité de survie plus faible que le dernier individu survit alors que le dernier rectangle meurt.

2.5 Opérateur de croisement

Lorsque les individus ont été sélectionnés, ils deviennent des parents et un opérateur de croisement leur est appliqué. Les gènes de chaque parent sont croisés afin que les individus enfants aient des caractéristiques de plusieurs individus parents. Il existe principalement deux types de croisement, utilisés suivant la nature des variables.

- Lors du croisement de variables discrètes, l'*opérateur de croisement discret* est utilisé. Il existe plusieurs types de croisement discret. Chaque croisement dépend du nombre de points de croisement. Lorsque le nombre de points de croisement correspond au nombre de bits moins un, alors le croisement uniforme de Syswerda est obtenu [78] (voir Figure 2.4).

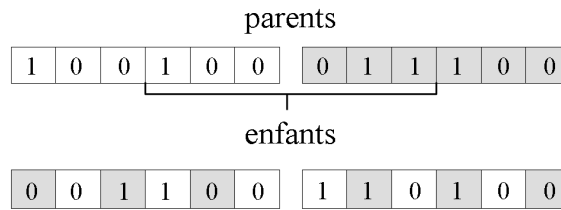


FIG. 2.4 – Croisement uniforme de Syswerda.

- Lors du croisement de variables réelles, l'*opérateur de croisement réel* est appliqué. Soit ω un nombre tiré aléatoirement dans l'intervalle $[0,1]$. Soient \vec{p}_1 et \vec{p}_2 les vecteurs contenant les gènes des deux parents dont les valeurs sont réelles. Alors les vecteurs \vec{e}_1 et \vec{e}_2 contenant les gènes des deux enfants sont :

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= \omega \vec{p}_1 + (1 - \omega) \vec{p}_2 \\ \vec{e}_2 &= \omega \vec{p}_2 + (1 - \omega) \vec{p}_1\end{aligned}\tag{2.6}$$

Pour accélérer la convergence de l'AG, l'*opérateur de croisement* dit *primitif* est souvent employé [40]. Le croisement primitif consiste à regarder au voisinage du meilleur individu s'il existe un individu présentant une meilleure fonction d'adaptation. Deux valeurs voisines de chaque gène du meilleur individu sont testées. Si l'individu possède n_g gènes, cela revient à regarder $2n_g$ individus. Le croisement primitif est un opérateur supplémentaire qui permet une bonne recherche locale. Cela permet de trouver immédiatement l'optimum s'il est à proximité [40].

2.6 Opérateur de mutation

L'opérateur de mutation altère aléatoirement les valeurs des gènes. Il permet de tester des individus ayant des caractéristiques ne provenant pas des parents, ce qui permet d'assurer une plus grande diversité génétique. Chaque mutation est associée à une probabilité de mutation P_m qui est très faible en pratique.

- Lors de la mutation d'une valeur discrète, l'*opérateur de mutation discrète* est utilisé. La mutation discrète consiste à muter la valeur du gène en une autre valeur suivant une probabilité de mutation P_m (voir Figure 2.5).

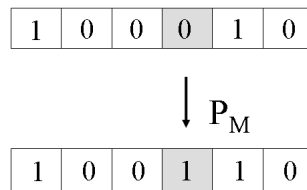


FIG. 2.5 – Opérateur de mutation discret.

- L'*opérateur de mutation réelle* consiste à muter un gène réel de telle façon que la valeur du gène muté se trouve dans son intervalle de définition :

$$gène^{muté} = gène + \delta gène \quad (2.7)$$

$$\text{avec } gène^{muté} \in [gène_{\min}; gène_{\max}]$$

La *mutation* dite *auto-adaptative* a pour propriété d'évoluer avec la population [50]. Au début du processus, le gène muté présente une valeur choisie dans son intervalle de définition. Ensuite, cet intervalle se resserre autour de la valeur du gène. Cette mutation auto-adaptative a pour conséquence d'apporter une forte diversité génétique au début de l'algorithme, puis elle permet de converger plus rapidement par la suite en resserrant l'intervalle de mutation autour du meilleur individu.

La Figure 2.6 illustre les notions de croisement et de mutation. L'opérateur de croisement est appliqué sur les deux premiers rectangles afin de donner naissance au premier enfant. Le deuxième enfant est un clone du deuxième parent. Cela est dû à l'opérateur de sélection élitiste qui remet automatiquement le meilleur individu dans la prochaine génération. Enfin, le dernier enfant des deux derniers parents a subi une mutation. En effet, la longueur et la largeur du dernier enfant ne proviennent pas des caractéristiques des deux derniers parents.

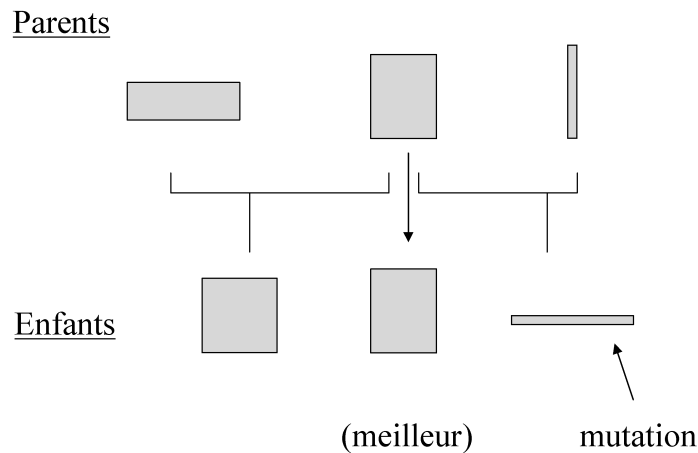


FIG. 2.6 – Exemple de croisement et de mutation.

2.7 Exploration et exploitation

La convergence d'un AG vers un optimum global dépend du compromis entre l'*exploration* et l'*exploitation* des solutions potentielles. L'*exploration* consiste à tester la plus grande variété possible d'individus afin d'obtenir la plus grande diversité génétique. L'*exploitation* consiste à examiner le voisinage du meilleur individu afin d'obtenir éventuellement de meilleurs individus. La Figure 2.7 schématise ces deux concepts.

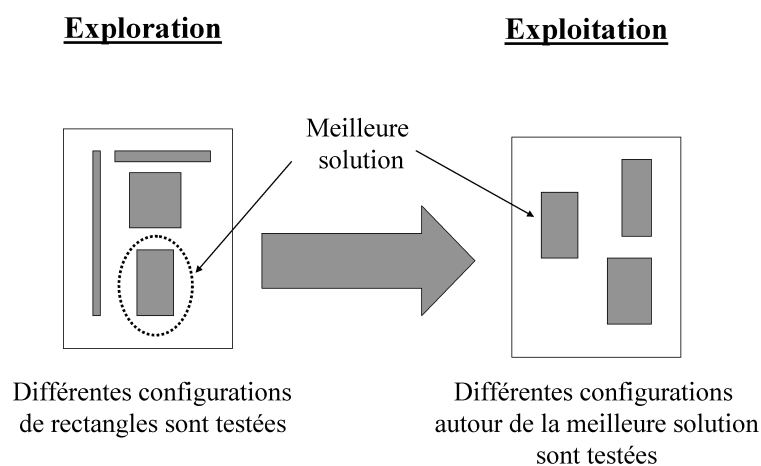


FIG. 2.7 – Exploration *versus* exploitation.

Dans le cas de l'exploration, les formes de rectangles les plus diverses sont obtenues. Lors de l'exploitation, une recherche autour de la forme la plus appropriée est effectuée. Les paramètres utilisés par les opérateurs ont une forte influence sur le comportement de l'AG et permettent de régler l'exploitation et l'exploration de l'AG. Les principales influences de ces paramètres sont décrites ci-après.

2.7.1 Paramètres influant sur l'exploration.

Une diversité génétique importante de l'AG permet une bonne exploration de celui-ci. Cette diversité génétique peut venir de divers paramètres :

- la taille de population : lorsqu'une taille de population est grande, l'AG explore de nombreuses solutions mais le temps de calcul est beaucoup plus important pour atteindre la convergence. De plus, une taille de population fixe (qui reste la même au fil des générations) ou dynamique (qui varie au fil des générations) peut être choisie. Une taille de population dynamique a pour avantage d'être assez grande au début de l'AG, favorisant ainsi l'exploration. Ensuite, cette taille diminue au cours de l'optimisation, favorisant ainsi l'exploitation à la fin de l'AG. De plus, une taille de population fixe nécessite un temps de calcul plus important ;
- l'opérateur de sélection proportionnelle : il permet la sélection d'individus moins performants, ce qui maintient de la variété dans la population ;
- la mutation : elle se règle par l'intermédiaire de la probabilité de mutation qui est généralement comprise entre 0,001 et 0,01 et crée une certaine diversité génétique ;
- la création de nouveaux individus : dans le but d'explorer le plus de solutions possibles, il est important d'apporter de nouveaux gènes. Une solution consiste à créer aléatoirement de nouveaux individus à chaque génération.

2.7.2 Paramètres influant sur l'exploitation.

Lors de l'optimisation par AG, il est nécessaire de regarder au voisinage de la meilleure solution afin de vérifier s'il n'existe pas une meilleure solution. Ceci se traduit par l'exploitation des résultats obtenus qui se règle par :

- la taille de population : une taille de population petite a tendance à centrer les individus créés autour de la meilleure solution, accélérant de ce fait la convergence de l'AG ;
- l'opérateur de sélection élitiste : afin d'assurer une convergence de l'AG, une sélection élitiste est classiquement utilisée. Toutefois, au lieu de ne choisir que le meilleur individu, les n meilleurs individus peuvent être gardés. n doit être

fixé de telle façon que l'AG ne converge pas trop vite car il peut conduire vers un optimum local. Dans ce cas-là, l'opérateur usité est appelé opérateur multi-élitiste ;

- le croisement primitif : le croisement primitif permet de trouver de suite une meilleure solution si celle-ci est au voisinage de la meilleure solution. Il permet donc une bonne exploitation des résultats.

2.7.3 Conclusion

Les bases des AGs ont été présentées en expliquant le rôle de chaque opérateur et de chaque paramètre et en soulignant la difficulté que représente leur réglage.

Lors du réglage de l'AG, il est nécessaire d'obtenir un compromis entre l'exploration et l'exploitation des résultats. En effet, une trop grande exploration des solutions potentielles conduit à un nombre d'analyses et à des temps de calcul trop importants. Une exploitation des résultats trop marquée mène souvent à une convergence vers un optimum local. Des tests préliminaires doivent être effectués afin de régler les divers paramètres précédemment présentés. Un exemple simple concerne la taille de la population de l'AG. Lorsque la taille de la population est trop petite, l'AG a tendance à converger trop rapidement vers un optimum local. A l'inverse, lorsque une taille de population est trop grande, l'AG explore de nombreuses solutions mais le temps de calcul devient beaucoup plus important pour atteindre la convergence. La taille de la population est un paramètre qu'il faut régler finement afin d'obtenir un algorithme qui converge vers un optimum tout en ayant exploré le plus de solutions possibles.

2.8 Optimisation de l'empilement, de la forme et de la position d'un patch composite.

La plupart des méthodes « classiques » ne peuvent pas être utilisées facilement dans le cas où le problème d'optimisation présente des variables discrètes, ce qui est le cas de l'optimisation de matériaux composites. En effet, les contraintes de fabrication restreignent souvent l'orientation des fibres à quatre valeurs : 0, ± 45 et 90 degrés. Des études menées sur l'optimisation de stratifiés ont montré l'existence de plusieurs optima [59] par exemple, ce qui rend pertinente l'utilisation d'AGs dans ce cas. Ils ont ainsi été utilisés avec succès dans des problèmes mécaniques d'optimisation d'empilement de stratifiés de matériaux composites [72] [70] [44] [43] [80]. Ce travail consiste donc à utiliser les AGs pour optimiser les stratifiés en s'appuyant sur les travaux précédemment menés [72] [70] [44] [43] [80] et à développer leur utilisation

pour optimiser la forme et la position sur la structure du renfort composite.

Le problème d'optimisation de structure s'écrit :

$$\text{minimiser } f(\mathbf{V}) \quad (2.8)$$

avec

$$c_i \leq 0; \quad i = 1, n_c \quad (2.9)$$

$$I_j \leq v_j \leq S_j; \quad j = 1, n_v \quad (2.10)$$

Le vecteur \mathbf{V} correspond au vecteur des variables de conception v_j contenant les orientations ainsi que la position et la forme du renfort composite. La fonction $f(\mathbf{V})$ est la fonction objectif à minimiser. Les c_i sont les contraintes du problème d'optimisation avec n_c le nombre de ces contraintes. En pratique, ces contraintes peuvent correspondre à une courbure minimale ou à une surface maximale à ne pas dépasser. I_j et S_j sont les bornes inférieures et supérieures des valeurs que peuvent prendre les variables de conception v_j , avec n_v le nombre de variables de conception. Dans un problème de renforcement, les variables de conception sont les orientations des n plis du composite ainsi que la forme et la position du patch composite sur la structure. Comme précédemment étudié [72] [70] [59] [44] [43] [80], les orientations des plis $[\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]$ sont considérées comme des valeurs discrètes et un codage discret est utilisé, c'est à dire que les gènes qui correspondent à l'orientation des fibres prennent les quatre valeurs usuelles : 0, ± 45 et 90 degrés. Il est à noter qu'aucune contrainte n'est ici imposée à l'orientation des plis afin de conserver l'orthotropie du matériau. Un autre angle β représenté par une variable réelle est aussi utilisé afin d'orienter le patch composite par rapport à la structure à renforcer (voir Figure 2.8-a). Ainsi les orientations des plis dans le repère de la structure sont égales à $[\theta_1 + \beta, \theta_2 + \beta, \dots, \theta_n + \beta]$.

Dans le but de décrire la géométrie de la frontière du patch, une description simple doit être utilisée en utilisant un minimum de variables. Dans le cas d'un patch circulaire, ces variables peuvent être le rayon et les coordonnées du centre du cercle. Dans le cas d'un patch rectangulaire, la largeur, la longueur et le centre du rectangle peuvent être utilisés. Dans notre cas, la forme du patch est modélisée par une courbe spline fermée dans le plan (voir Figure 2.8-b) afin de donner plus de liberté à la forme du patch. Huit points d'interpolation sont utilisés pour définir cette courbe. Des calculs préliminaires ont montré que ce nombre de points correspondait à un bon compromis entre le temps de calcul et la liberté d'obtenir des formes de

patches très diversifiées. Les variables de conception topologiques sont donc les coordonnées (x_i, y_i) de ces huit points d'interpolation. Du fait du couplage avec un code d'éléments finis, les coordonnées sont approchées par les coordonnées du noeud du maillage le plus proche (voir paragraphe 2.10).

L'une des difficultés de ce problème d'optimisation est la capacité d'obtenir des solutions valides. Par souci de simplicité, un patch composite ne peut pas être défini par une courbe spline contenant des boucles. Une procédure heuristique a été développée afin d'éviter l'apparition de boucles dans la spline. Elle est présentée dans le paragraphe 2.9.4.

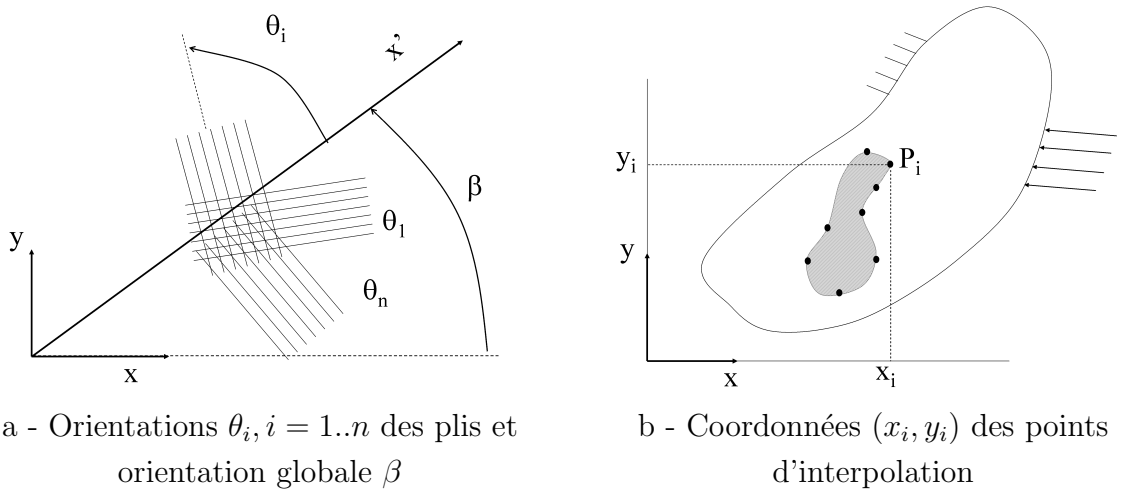


FIG. 2.8 – Variables de conception du problème d'optimisation.

2.9 Application d'un algorithme génétique à un problème de renforcement

2.9.1 Introduction

Afin d'évaluer la fonction d'adaptation F_i , un code de calcul par éléments finis est utilisé. Une plaque d'aluminium sollicitée en traction uniaxiale est ici considérée à titre de premier exemple d'application. Elle est trouée en son centre et ce trou doit être renforcé par un patch composite carbone/époxyde. Les propriétés géométriques et matérielles ainsi que le maillage sont présentés dans un premier temps. Ensuite, l'AG est intégré à l'analyse mécanique par éléments finis.

2.9.2 Hypothèses du problème mécanique

Les caractéristiques géométriques du problème posé sont présentées Figure 2.9.

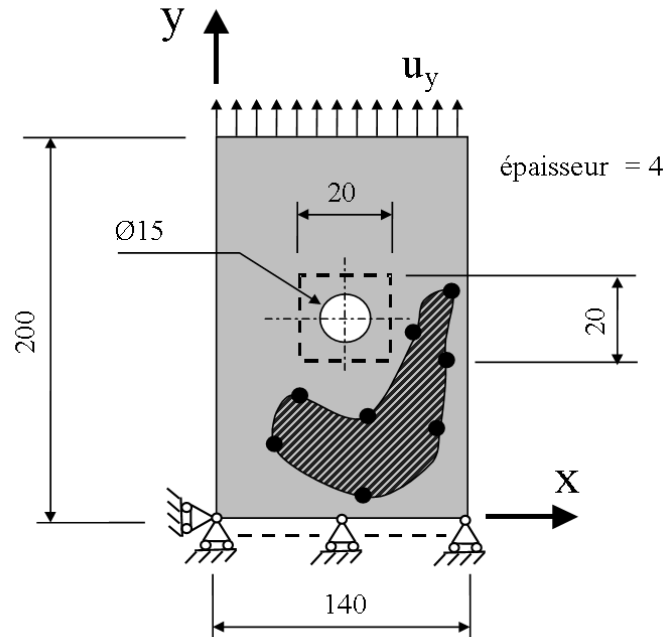


FIG. 2.9 – Modèle mécanique du problème d'optimisation.

La plaque d'aluminium à renforcer a pour dimensions $200 \text{ mm} \times 140 \text{ mm}$ avec une épaisseur de 4 mm . Cette plaque présente un trou de 15 mm de diamètre en son milieu. Le comportement de la plaque est supposé linéaire élastique isotrope ($E = 70 \text{ GPa}$, $\nu = 0,3$). Les sollicitations extérieures se résument, dans un premier temps, à des déplacements imposés u_y . La structure métallique doit être renforcée par un patch composite carbone/époxyde dont le comportement mécanique est supposé linéaire élastique orthotrope ($E_x = 181 \text{ GPa}$, $E_y = 10 \text{ GPa}$, $\nu_{xy} = 0,28$, $G_{xy} = 7 \text{ GPa}$). Le patch est ici composé de 6 plis uniaxiaux d'une épaisseur totale de $0,75 \text{ mm}$, ce nombre pouvant bien sûr être changé. Les orientations des plis $\theta_i, i = 1..6$, sont définies parmi les valeurs $0, \pm 45$ et 90 degrés. L'orientation globale du patch composite par rapport à la structure est quant à elle définie par un angle continu β (voir Figure 2.8-b).

Une modélisation en deux dimensions est choisie afin de ne pas alourdir les temps de calcul. Le collage entre le patch composite et la plaque d'aluminium est donc considéré comme parfait : épaisseur de colle nulle et pas de zone de transfert d'effort entre la plaque d'aluminium et le patch composite. Cette hypothèse simplificatrice a pour conséquence de supposer que le transfert d'effort de la plaque d'aluminium vers le composite est immédiat alors qu'il est normalement progressif [38]. Cette hypothèse est discutée dans les chapitres 4 et 5 où la détermination des contraintes de cisaillement dans la colle est examinée.

Les contraintes additionnelles suivantes sont imposées :

- l'aire du patch est limitée à 20% de la plaque d'aluminium ;
- le patch ne peut pas traverser une zone dite interdite autour du trou. Cette zone est un carré de dimensions $20 \times 20 \text{ mm}^2$ (voir Figure 2.9). Cette contrainte correspond en pratique à la nécessité de maintenir une zone libre d'accès autour du trou, nécessité due à des impératifs de maintenance dans les problèmes de renforcement de structures aéronautiques traités plus loin.

Le but est de trouver la forme, la position et les orientations des plis du patch composite afin de réduire au maximum la contrainte moyenne de Von Mises dans cette zone carrée définie autour du trou. Le critère de Von Mises est d'abord utilisé par souci de simplicité. Il est à noter que d'autres critères plus complexes, comme le critère de Dang Van, serviront de fonction objectif dans les applications suivantes.

2.9.3 Modélisation numérique par éléments finis

Le code de calcul par éléments finis Ansys7.0 est utilisé afin de calculer la fonction objectif de chaque individu. La structure est modélisée par des éléments de coque à huit noeuds (élément Shell93) pour la plaque d'aluminium et des éléments composites à huit noeuds (élément Shell99) pour le patch composite. La résolution est effectuée avec le solveur « Preconditioned Conjugate Gradient » implémenté sous Ansys. Lors de l'exécution de l'AG, des formes de patches les plus diverses sont obtenues. Dans un souci d'évaluer de la même manière chaque solution, un maillage régulier est effectué pour toutes les solutions de patches obtenues. Ce maillage reste le même tout au long de l'optimisation afin d'éviter toute influence du maillage sur l'AG. Le collage parfait est créé entre la plaque et le patch composite en fusionnant les noeuds des éléments. Le fait de fusionner les noeuds a pour conséquence d'avoir le même maillage pour la structure et pour le patch composite (voir Figure 2.10). La courbe spline est donc discrétisée et cette discrétisation dépend du maillage utilisé.

Le nombre total d'éléments de la structure est égal à 1264. La taille du côté d'un élément est égale à 5 mm. Le trou placé au milieu de la plaque entraîne une concentration de contrainte. Par conséquent, un maillage raffiné est effectué autour de ce trou (voir le zoom sur la Figure 2.10). Pour une simple plaque trouée sans patch, soumise à un essai de traction, les calculs numériques peuvent être comparés à la solution analytique dans le cas où le rayon est faible par rapport à la longueur de la plaque [62], ceci afin d'apprécier la densité du maillage et la convergence du calcul. La Figure 2.11 représente l'évolution de la contrainte σ_{yy} suivant l'axe x avec une contrainte nominale $\sigma_n = 12,5 \text{ MPa}$.

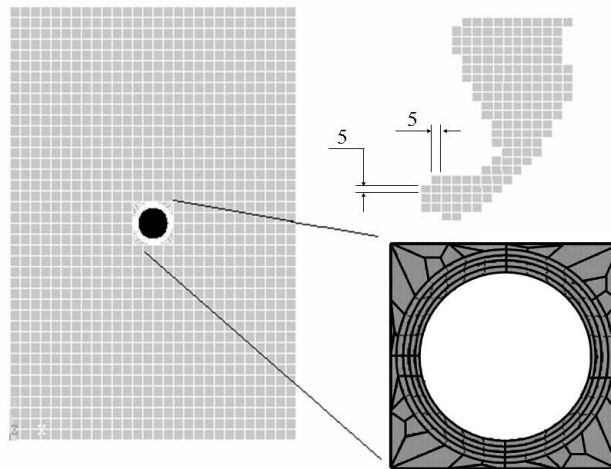


FIG. 2.10 – Discretisation du maillage utilisé.

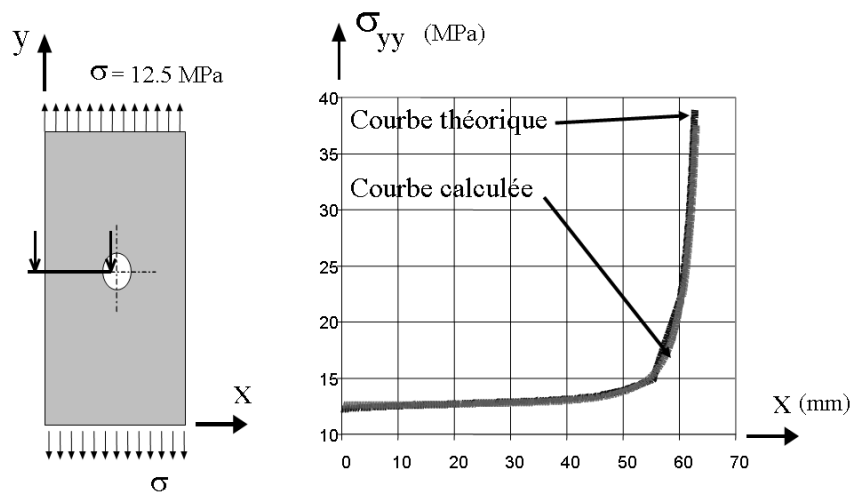


FIG. 2.11 – Evolutions théorique et numérique de la contrainte σ_{yy} suivant l'axe x .

Selon la théorie, la contrainte maximum σ_{yy} au bord du trou doit être égale à $3 \sigma_n$, ce qui correspond ici à 37,5 MPa. Cette valeur est à comparer avec les 38,8 MPa obtenus par le calcul par éléments finis, soit 3,5% d'erreur. L'augmentation du nombre d'éléments tendrait vers une meilleure estimation de cette valeur maximale mais augmenterait considérablement le nombre d'inconnues nodales, et donc le temps de calcul. La présente densité du maillage représente un bon compromis entre la précision des résultats et le temps de calcul.

2.9.4 Construction de la forme du patch

La fonction « spline » d'Ansys est utilisée afin de modéliser la géométrie du patch. Huit points d'interpolation sont utilisés. Comme des patchs sans boucle doivent être générés d'après les hypothèses retenues pour le calcul, une procédure heuristique adaptée a été développée. Elle repose sur différentes étapes qui sont décrites ci-dessous.

Tout d'abord un quadrangle défini par quatre points Q1, Q2, Q3 et Q4 est créé aléatoirement. Ensuite, chaque côté est déformé avec quatre autres points tirés eux aussi aléatoirement. Une courbe spline passe par les huit points et définit la géométrie du patch. La procédure heuristique mise au point pour éviter les boucles est la suivante (voir Figure 2.12) :

- d'abord un point I représenté sur la figure est construit à partir des points Q1, Q2, Q3 et Q4 qui définissent le quadrangle. Ses coordonnées sont :

$$\begin{cases} x_I = \frac{\min(x_{Q2}, x_{Q3}) + \max(x_{Q1}, x_{Q4})}{2} \\ y_I = \frac{\min(y_{Q1}, y_{Q2}) + \max(y_{Q3}, y_{Q4})}{2} \end{cases} \quad (2.11)$$

- ensuite un premier point R1 déforme l'un des côtés. L'aire b est définie par les lignes $d1$, $d2$, $d3$ et (Q1Q2). L'aire 1 est définie par les lignes $d1$, $d2$ et (Q1Q2). Les lieux autorisés pour le premier point R1 sont l'aire 1 et l'aire b (voir Figure 2.12-b) ;
- le lieu du deuxième point R2 dépend de la localisation du premier point R1 : si le premier point R1 est à l'intérieur de l'aire b , alors la position du deuxième point R2 est limitée à l'aire 2. Si le premier point R1 est à l'intérieur de l'aire 1, alors la position du deuxième point R2 est limitée aux aires 2 et c . L'aire 2 est définie par les lignes $d5$, $d6$ et (Q2Q3). L'aire c est définie par les lignes $d4$, $d5$, $d6$ et (Q2Q3) (voir Figure 2.12-c) ;
- la localisation du troisième point R3 dépend de la localisation du deuxième point : si le deuxième point R2 est à l'intérieur de l'aire c , la localisation du troisième point R3 est limitée à l'aire 3. Si le deuxième point est à l'intérieur de l'aire 2, le troisième point est à l'intérieur des aires 3 et d . L'aire 3 est définie par les lignes $d8$, $d9$ et (Q3Q4). L'aire d est définie par les lignes $d7$, $d8$, $d9$ et (Q3Q4) (voir Figure 2.12-d).
- la localisation du dernier point dépend à la fois de la localisation du premier et du troisième point. Si le premier point est à l'intérieur de l'aire b ou si le troisième point est à l'intérieur de l'aire d , la localisation du dernier point est limitée à l'aire 4 définie par les lignes $d11$, $d12$ et (Q1Q4). Dans le cas contraire,

la localisation du dernier point est limitée à l'aire 4 et à l'aire e définie par les lignes $d10$, $d11$, $d12$ et (Q1Q4) (voir Figure 2.12-e).

Il a été observé que cette procédure produisait rarement des individus invalides. Le taux de validité est supérieur à 90% alors qu'il aurait été inférieur à 1% si aucune précaution n'avait été prise. Cette procédure garantit de surcroît une large diversité de formes de patch.

La surface du patch est ensuite calculée pour savoir si elle ne dépasse pas les 20% de la surface de la plaque à renforcer. Dans le cas contraire, le patch est rejeté. Il est à noter que les parties du patch qui traversent la zone qualifiée d'interdite au paragraphe 2.9.2 sont simplement effacées. Ce cas apparaît concrètement dans les exemples traités au chapitre 3.

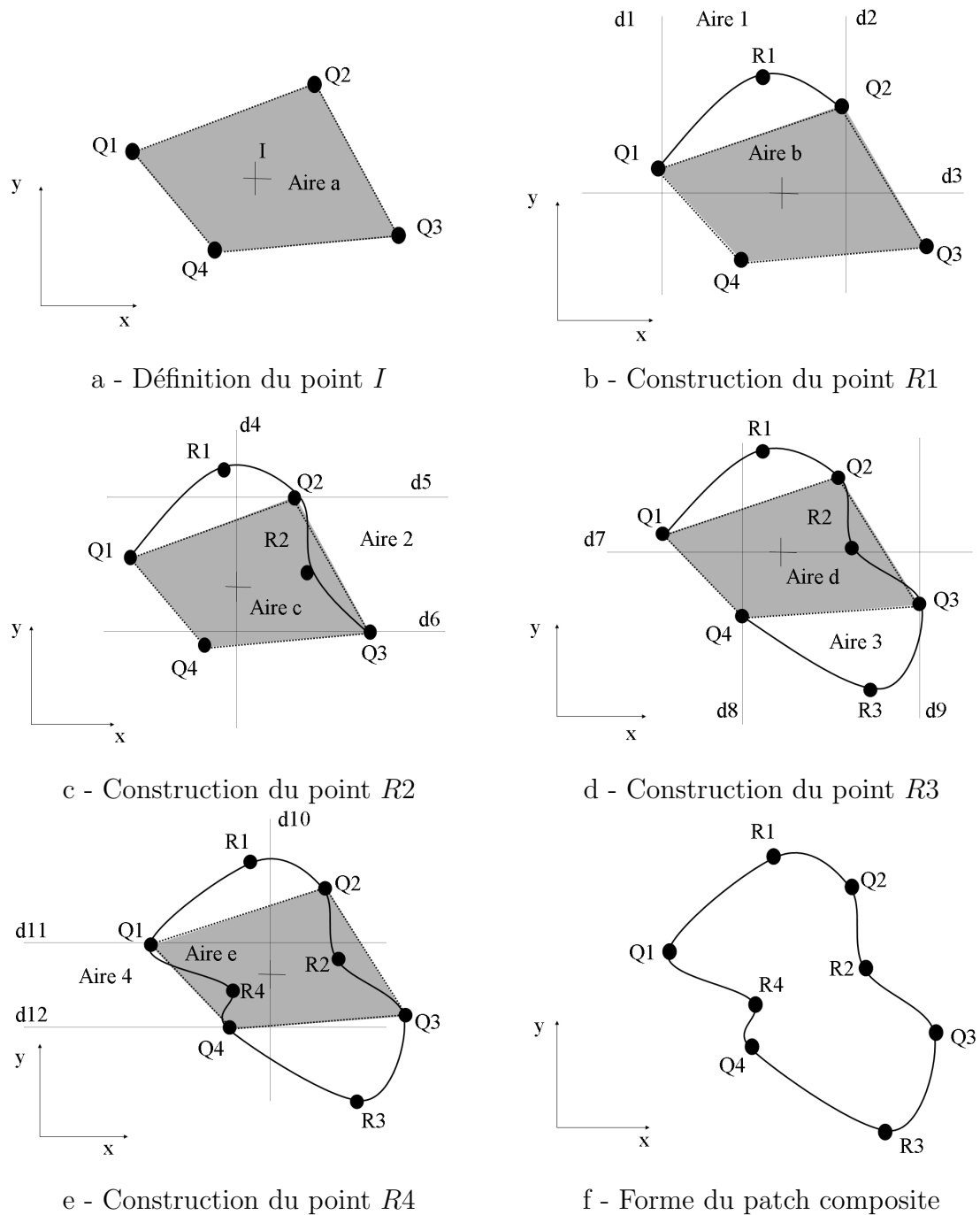


FIG. 2.12 – Construction d'une courbe spline à huit points d'interpolation.

2.10 Choix des opérateurs de l'AG

2.10.1 Introduction

Ce paragraphe présente les principaux choix d'opérateurs et de paramètres utilisés dans la procédure d'optimisation. Quelques calculs préliminaires ont été réalisés

sur la structure présentée sur la Figure 2.9. Ils ont permis d'ajuster les paramètres afin d'obtenir un bon compromis entre exploration et exploitation (voir paragraphe 2.7).

Dans l'approche proposée, chaque patch est représenté par un chromosome symbolisé sur la Figure 2.13.

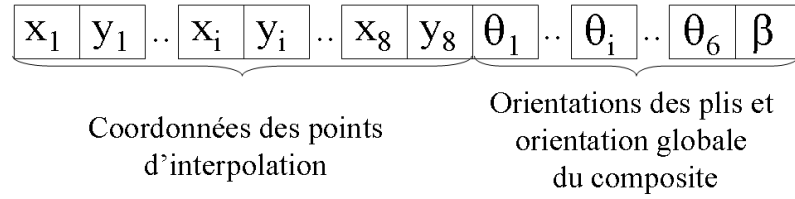


FIG. 2.13 – Vue schématique d'un chromosome.

Chaque gène d'un chromosome représente une variable de conception : les coordonnées des huit points d'interpolation de la courbe spline, les angles θ_i et β , soit un total de 23 variables dont 17 continues et 2 discrètes.

2.10.2 Choix des opérateurs de sélection et de croisement

Deux opérateurs de sélection sont utilisés : l'opérateur de sélection élitiste et l'opérateur de sélection proportionnelle (voir paragraphe 2.4). L'opérateur de sélection par tournoi n'a pas été utilisé. L'opérateur de croisement uniforme est utilisé pour l'orientation des plis, l'opérateur de croisement réel pour l'orientation globale β et pour les coordonnées des points d'interpolation de la courbe spline (voir paragraphe 2.5). Le croisement de deux courbes splines est un point important. La Figure 2.14 représente la construction d'une des deux courbes splines enfants. Les points enfants E sont définis à partir des points parents P, P' avec un poids choisi aléatoirement (voir paragraphe 2.5). Des tests sont effectués afin de vérifier qu'il n'y ait pas de boucles dans la courbe spline obtenue. Ensuite la surface de l'enfant est calculée : si sa surface dépasse 20% de la surface totale de l'échantillon, alors il est éliminé. Un croisement primitif est ajouté afin d'accélérer la convergence de l'AG (voir paragraphe 2.5).

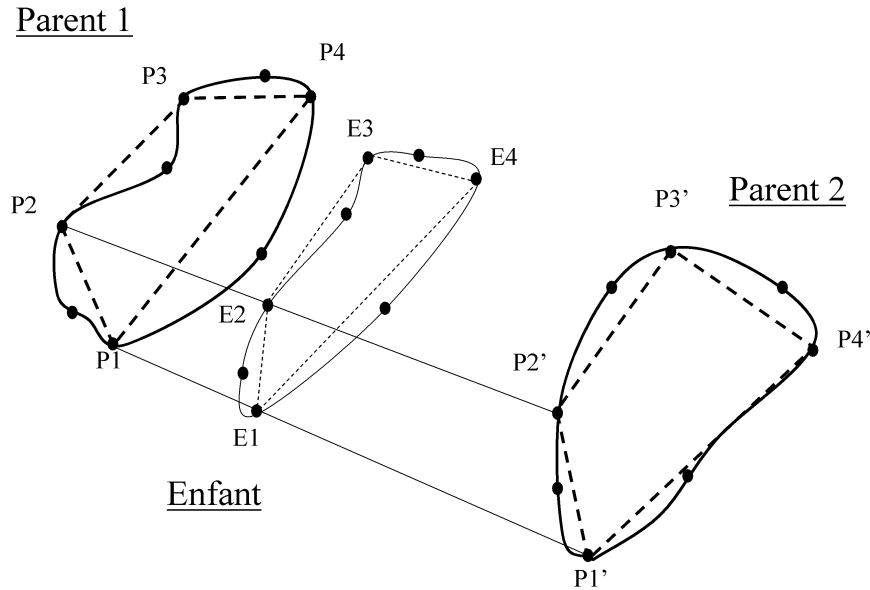


FIG. 2.14 – Construction des courbes splines enfants.

2.10.3 Intégration d'un nouvel opérateur : l'opérateur de translation

Afin de compléter ce croisement primitif, un *opérateur* dit *de translation* a été implémenté. Il consiste à tester 4 individus supplémentaires. Dans cette approche bidimensionnelle, la forme du meilleur individu est tradatée suivant les quatre directions : x , $-x$, y et $-y$ respectivement. De ce fait, si l'un des $2 \times n_v + 4$ individus ($2 \times n_v$ dus au croisement primitif et 4 dus à l'opérateur de translation) est meilleur que le meilleur individu de la génération en cours, il est placé dans la génération suivante.

2.10.4 Valeurs des paramètres

Les valeurs des différents paramètres qui pilotent l'AG sont les suivantes :

- une taille de population dynamique a été choisie [22] : en effet, il a été constaté qu'une taille fixe de population allongeait le temps de calcul par rapport à une taille dynamique. De plus, des tests préliminaires ont montré que les individus trouvés sont meilleurs avec une taille de population dynamique ;
- une population initiale de 160 individus est choisie. Les premiers calculs ont montré que les populations plus petites convergent souvent vers un minimum local et que le temps de calcul avec des populations plus grandes est beaucoup

trop long ;

- un croisement uniforme est choisi pour les 6 variables discrètes $\theta_i, i = 1..n$. Les premiers tests ont montré que l'utilisation du croisement à deux points ou l'utilisation du croisement uniforme donnait le même résultat. Dans notre cas, le nombre de points de croisement a très peu d'influence sur le résultat. Cela provient du fait que le nombre de possibilités de séquences d'empilement reste faible (144). En effet, seuls 6 plis constituent le stratifié et l'ordre d'empilement n'est pas pris en compte ;
- l'opérateur de croisement primitif est ajouté (voir paragraphe 2.5) afin d'accélérer la convergence. La valeur des paramètres gouvernant les variations de chaque gène dépend de la nature des variables de conception. Cette valeur est égale à 45 degrés pour l'orientation des plis et 1 degré pour l'orientation globale β . Cette valeur dépend de la taille de l'élément fini pour les coordonnées des points d'interpolation. En effet, si la variation des coordonnées est plus petite que la taille de l'élément, le croisement primitif n'a aucun effet du fait de la discrétisation de la courbe spline.

2.10.5 Résumé des choix effectués

Les opérateurs et les paramètres utilisés sont résumés dans le Tableau 2.1. L'AG et ses opérateurs sont représentés symboliquement sur la Figure 2.15.

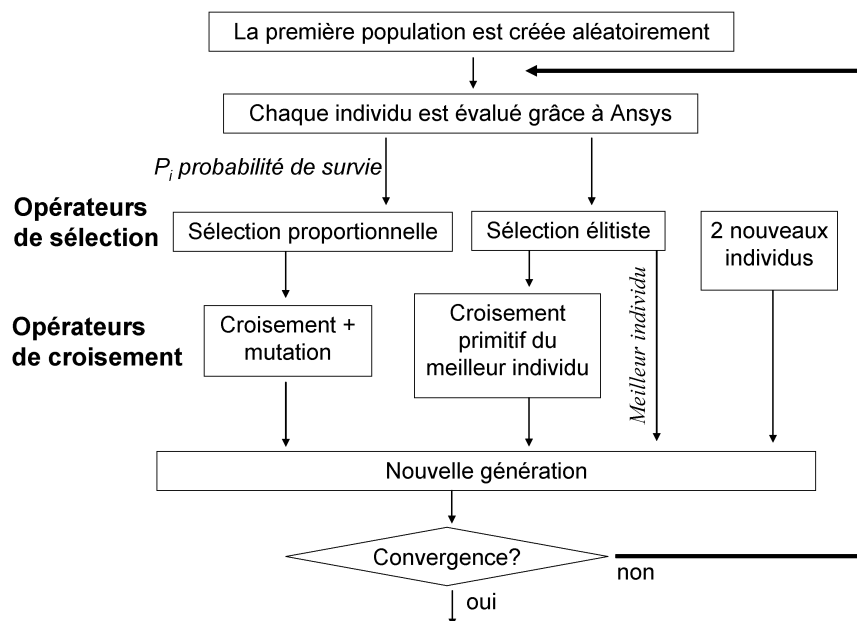


FIG. 2.15 – Description de l'algorithme génétique et des opérateurs utilisés.

| Opérateurs | Caractéristiques |
|----------------------------|---|
| opérateurs de sélection | sélections élitiste et proportionnelle |
| opérateurs de croisement | réel pour les coordonnées des points d'interpolation de la courbe spline et pour l'orientation de référence, discret pour l'orientation des plis. Deux parents donnent naissance à deux enfants. Probabilité de mutation égale à 0,01 |
| évolution de la population | taille dynamique avec une population initiale de 160 individus, 60 générations ce qui correspond environ à 4000 analyses par éléments finis |
| opérateurs additionnels | croisement primitif et opérateur de translation avec une valeur de variation discrétisée due au couplage avec le code d'éléments finis |

TAB. 2.1 – Choix des opérateurs.

2.10.6 Autre critère : critère de défaillance

D'autres contraintes peuvent être ajoutées dans cette étude, bien qu'elles ne soient pas intégrées à l'AG. En effet, du fait de la modélisation bidimensionnelle, il n'est pas pertinent d'intégrer des critères de défaillance de la colle ou du patch. Contrairement à d'autres outils d'optimisation, les AGs permettent d'obtenir une famille de solutions qui peuvent être vérifiées *a posteriori* vis-à-vis de contraintes additionnelles comme les critères de défaillances.

Considérons par exemple la défaillance du patch composite avec le critère de Tsai-Wu. Pour chaque pli du stratifié, le critère de Tsai-Wu doit être vérifié (voir Equation (1.10)). Les propriétés de résistance sont présentées Tableau 1.2. La défaillance du substrat ou de la colle peut être aussi vérifiée. Pour cela, le critère de Von Mises est utilisé (voir Equation (1.11)).

A la fin de l'AG, des calculs sont donc effectués avec les meilleurs individus afin de vérifier les critères de Tsai-Wu et de Von Mises. Les calculs par éléments finis sont conduits avec Ansys en intégrant le comportement élastique linéaire isotrope de la colle ($E=10$ GPa, $\nu=0,3$) avec une épaisseur de 0,125 mm.

2.11 Conclusion

Les bases des AGs ont été présentées en soulignant le fait que leur difficulté d'emploi réside dans le réglage des opérateurs et de leurs paramètres. La longueur des calculs due aux nombreuses évaluations de la fonction d'adaptation constitue aussi un handicap, surtout lorsque des calculs par éléments finis sont nécessaires, comme dans le cas présent. L'étude bibliographique a montré qu'ils ont été développés avec succès pour l'optimisation de stratifiés [72]. Ce chapitre a présenté le prolongement de ce travail à l'optimisation de la forme et de la position d'un patch composite (voir Figure 2.16). Le couplage d'un AG avec un code de calcul par éléments finis permet l'optimisation de l'empilement du stratifié ainsi que l'optimisation de la forme et de la position du patch composite dans un contexte de renforcement de structure. L'application de l'AG à différents cas va maintenant être abordée.

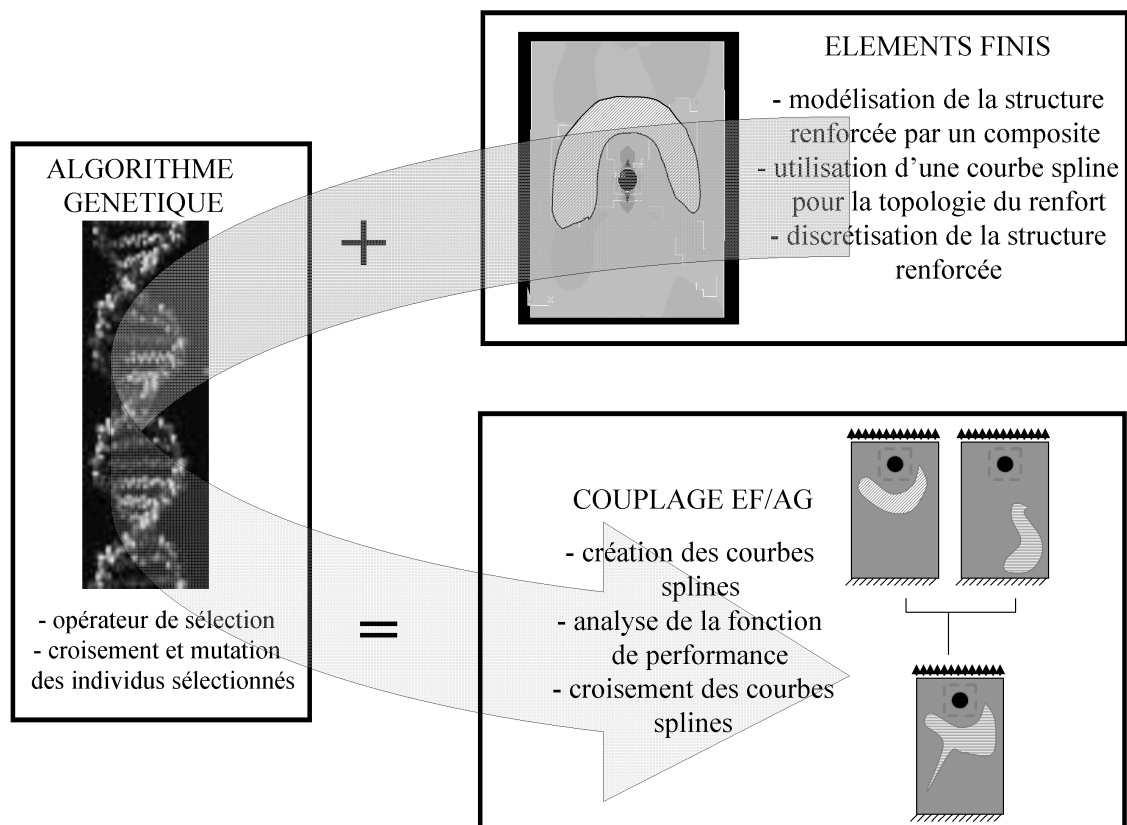


FIG. 2.16 – Résumé du chapitre 2.

Chapitre 3

Applications à des problèmes de renforcement

L'outil d'optimisation précédemment développé est appliqué dans différents cas. Dans un premier temps, deux essais statiques sur une plaque trouée sont considérés. Les deux essais sont respectivement un essai de traction et un essai de cisaillement à déplacements imposés. Pour des raisons de simplicité, la contrainte équivalente de Von Mises est utilisée comme fonction objectif lors de ces deux essais. Dans un deuxième temps, l'AG est appliqué dans le cas d'un essai de fatigue simulé. Le critère de Dang Van est utilisé comme fonction objectif afin de quantifier le renforcement créé par les patchs optimisés. Enfin, un patch composite est optimisé afin de renforcer une voilure-type d'avion endommagée. L'objectif est de réduire dans ce cas les efforts près de la zone à soulager. Dans le but d'évaluer le renforcement des patchs optimisés dans les différents cas, les résultats sont comparés au cas d'une structure renforcée par un patch de géométrie simple (cercle ou rectangle) dont l'aire est égale à 20% de la surface totale et dont les fibres sont alignées avec l'axe de la sollicitation.

3.1 Chargements statiques

3.1.1 Fonction objectif

La fonction objectif d'un individu i est obtenue en calculant la moyenne de la contrainte de Von Mises σ_i^{VM} dans la zone à soulager. La fonction objectif f_i et la fonction d'adaptation F_i d'un individu i s'écrivent :

$$\begin{cases} f_i = \sigma_i^{VM} \\ F_i = \sigma^{VM}(\text{pire individu}) - \sigma_i^{VM} \end{cases} \quad (3.1)$$

La contrainte $\sigma^{VM}(\text{pire individu})$ correspond à la moyenne de la contrainte de Von

Mises du moins bon individu à chaque génération. Cette contrainte correspond aussi à la constante C de l'Equation (2.4).

3.1.2 Essai de traction

Le problème de renforcement est le même que précédemment (Figure 2.9) : le chargement extérieur se réduit ici à des déplacements imposés $u_y = 1$ mm. Chaque individu i est évalué grâce à un rapport r_i défini par :

$$r_i = \frac{f_i}{f_{\text{réf}}} \times 100 \quad (3.2)$$

$f_{\text{réf}}$ correspond à la moyenne de la contrainte de Von Mises dans la zone à soulager de la structure non renforcée. La valeur du rapport r_i du meilleur individu au long de la procédure est représentée sur la Figure 3.1. Le temps de calcul est dans ce cas d'environ un jour avec un ordinateur PC Pentium IV 3.06 GHz, avec 1 Go de RAM. La convergence est atteinte à la 47^{ème} génération, avec une contrainte égale à 82,2% de la valeur de référence $f_{\text{réf}}$. Au début de l'AG, la valeur du meilleur individu décroît rapidement. Ensuite, l'évolution ralentit progressivement et atteint 82,2%. Pour information, il est intéressant de noter que la contrainte maximale dans la zone à soulager a chuté quant à elle de 22%. Par comparaison, un patch circulaire de même surface centré sur le trou, avec une orientation globale $\beta = 90$ degrés et 6 plis à 0 degré, ne diminue la contrainte moyenne de Von Mises que de 7%.

La Figure 3.2 représente la géométrie du patch optimisé obtenu. Puisque la forme du patch est définie par une seule courbe spline, la présence des deux parties du patch représentées sur la figure est une conséquence de la présence de la zone interdite, zone où la courbe spline est effacée (voir chapitre 2). Les six plis sont tous orientés à 1 degré par rapport à la direction y . Les fibres sont donc quasiment orientées avec la direction de sollicitation, comme le suggère l'intuition. Il est intéressant de noter que des solutions quasi symétriques ont également été trouvées grâce à l'AG.

La Figure 3.3 représente, pour la solution optimale, la contrainte de Von Mises σ^{VM} dans la plaque d'aluminium suivant la direction x . Deux vues sont présentées : l'une au milieu de la plaque et l'autre proche de l'encastrement. En observant la vue 2 de la Figure 3.3, il est intéressant de noter que les contraintes sont plus importantes dans la partie droite de la plaque : l'un des effets du patch optimisé est de dévier le flux de contraintes de la structure grâce à la dissymétrie de la géométrie.

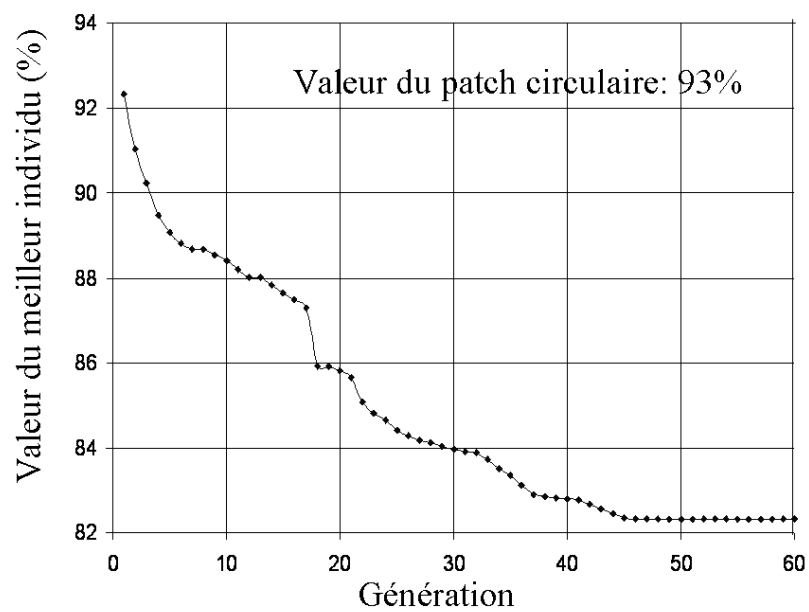


FIG. 3.1 – Courbe de convergence dans le cas d'un essai de traction.

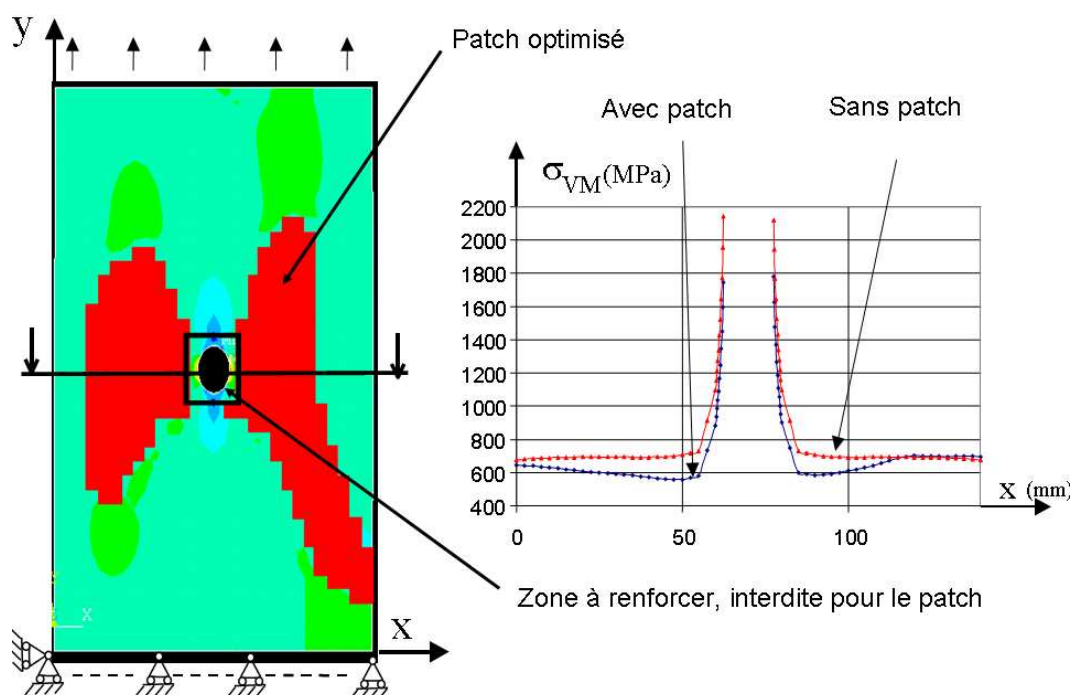


FIG. 3.2 – Structure renforcée et distribution de la contrainte de Von Mises dans l'aluminium.

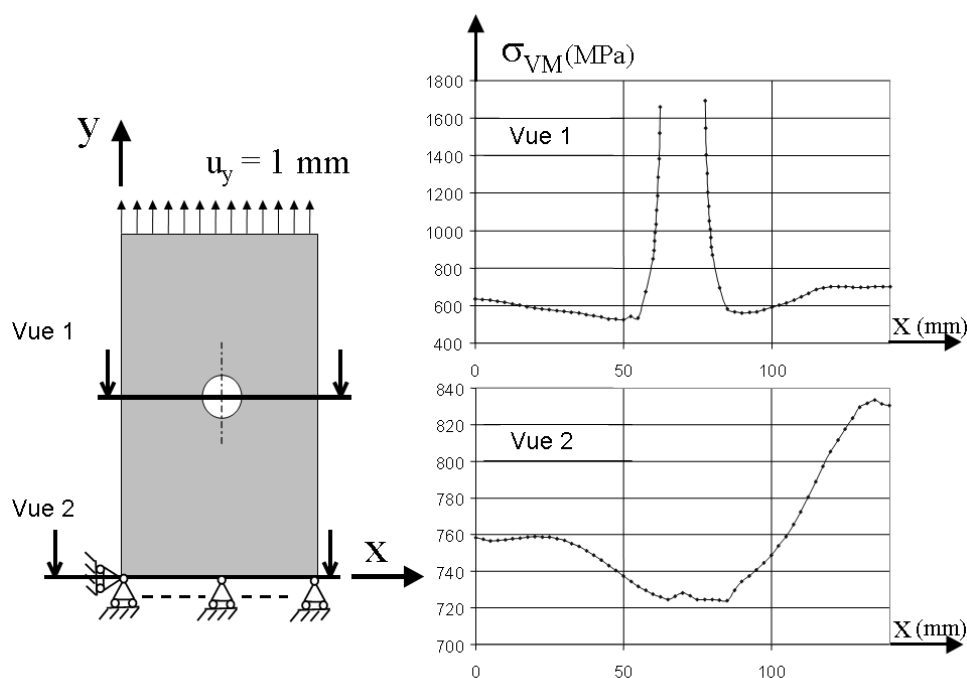


FIG. 3.3 – Coupes de la distribution de la contrainte de Von Mises dans l'aluminium au milieu et en bas de la structure renforcée.

Deux phénomènes de renforcement sont observés : un renforcement « local » et un renforcement « global ». Les contraintes sont habituellement concentrées dans le patch composite et cela provoque un renforcement dans le voisinage de celui-ci : ceci peut être considéré comme du renforcement local. Ce phénomène est utilisé en réparation avec un patch circulaire par exemple. Le renforcement global, quant à lui, induit une nouvelle distribution des contraintes dans *toute* la structure. Il consiste à dévier le flux de contraintes loin de la zone à soulager. Ce renforcement global peut être observé sur la Figure 3.3 où le niveau de contraintes est plus important dans la partie droite de la plaque, que ce soit au milieu ou près de l'encastrement.

La surface du patch composite peut être divisée en deux parties. La partie gauche provoque essentiellement un renforcement local : elle renforce grâce à sa présence près du trou. L'effet global de cette partie est faible quant à lui, car son influence est négligeable sur les contraintes près de l'encastrement. La partie droite, quant à elle, induit un renforcement plus global : elle dévie les contraintes vers la partie droite de la structure.

Le phénomène le plus important, pour un renfort efficace, semble être en fait le renforcement global. Il est principalement dû à l'orientation des fibres et à la géométrie étirée. Dans notre cas, c'est la géométrie qui induit principalement le renforcement global. Il est à noter que les deux parties du patch composite renforcent

localement et globalement, mais le renforcement local (respectivement le renforcement global) est plus présent dans la partie gauche (respectivement dans la partie de droite).

Il faut noter que le patch optimisé satisfait au critère de Tsai-Wu (voir chapitre 1). Cette solution est donc validée pour ce test de traction.

Enfin, l'AG a été lancé plusieurs fois avec des populations initiales différentes. La Figure 3.4 représente quelques unes des solutions représentatives trouvées. Cependant, dans la plupart des patchs optimisés, l'AG cherche à dévier le flux de contraintes soit dans la partie gauche ou soit dans la partie droite de la structure à renforcer. En effet, le patch de la Figure 3.2 dévie le flux de contraintes dans la partie droite alors que le premier patch de la Figure 3.4 dévie le flux de contraintes dans la partie gauche de la structure. Dans cet exemple, la variété des patchs optimisés est assez importante. Les exemples présentés sur la Figure 3.4 sont cependant moins efficaces que celui de la Figure 3.2 ($r_i=86,2\%$ et $87,3\%$ au lieu de $82,2\%$).

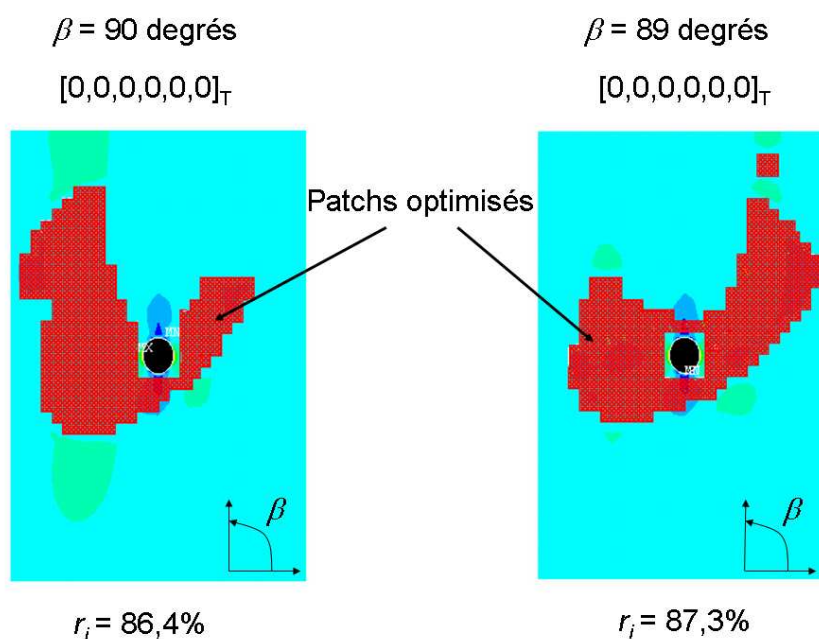


FIG. 3.4 – Autres patchs trouvés dans le cas d'un essai de traction.

3.1.3 Essai de cisaillement

Le problème de renforcement précédemment décrit est repris ici, mais avec un chargement différent. Dans ce paragraphe, la structure est soumise à un essai de cisaillement au lieu d'un essai de traction (Figure 3.5). La fonction objectif f_i ainsi que la fonction d'adaptation F_i sont les mêmes que dans le cas de l'essai de traction. Les déplacements imposés \vec{U} sur les noeuds de la frontière sont calculés à partir des

relations suivantes :

$$\vec{U} = \vec{A} \cdot \vec{OM} \quad (3.3)$$

avec :

$$\vec{U} : \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

$$\vec{A} : \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

$$\vec{OM} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

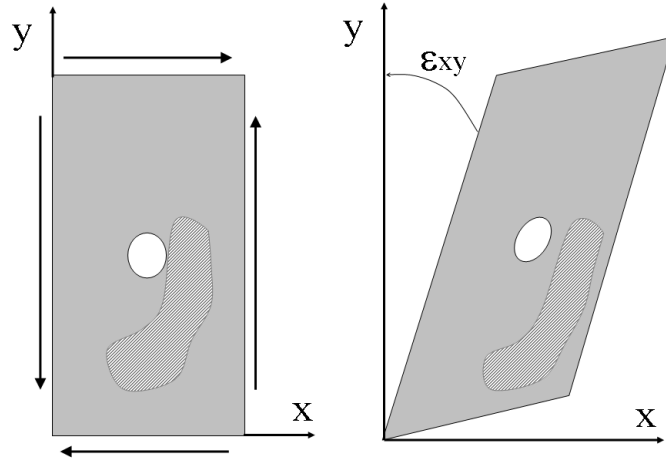


FIG. 3.5 – Essai de cisaillement.

La Figure 3.6 représente la valeur du rapport r_i du meilleur individu en fonction du numéro de la génération. Au début de l'AG, la valeur du meilleur individu décroît rapidement. Ensuite, elle ralentit progressivement afin d'atteindre 95,6%, ce qui est équivalent à une diminution de 4,4% dans la zone endommagée. Il est intéressant de noter que la diminution de la contrainte de Von Mises est beaucoup moins importante que dans le cas de l'essai de traction. La contrainte maximale a diminué quant à elle de 3,3%. Par comparaison, un patch circulaire avec 6 plis orientés à 45 degrés (respectivement à ± 45 degrés) augmente la contrainte moyenne de Von Mises de 6,8% (respectivement 6,2%), ce qui est contraire à l'objectif à atteindre.

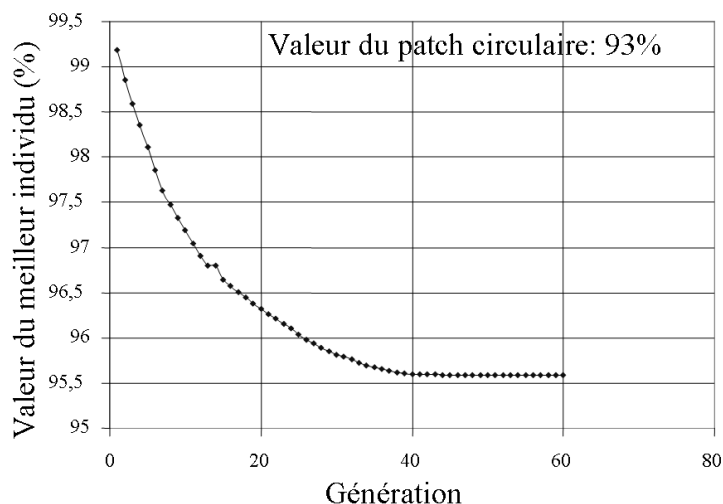


FIG. 3.6 – Courbe de convergence dans le cas d'un essai de cisaillement.

La géométrie du patch optimal et la distribution de la contrainte de Von Mises dans la plaque d'aluminium sont représentées sur la Figure 3.7. Les six plis sont tous orientés à 52 degrés par rapport à la direction x . Le patch dévie les contraintes sur la partie gauche supérieure de la plaque. Lors de cet essai de cisaillement, le phénomène de renforcement est essentiellement dû au renforcement global. De plus, le patch optimisé satisfait le critère de Tsai-Wu. Cette solution semble donc efficace afin de renforcer une plaque trouée soumise à un essai de cisaillement.

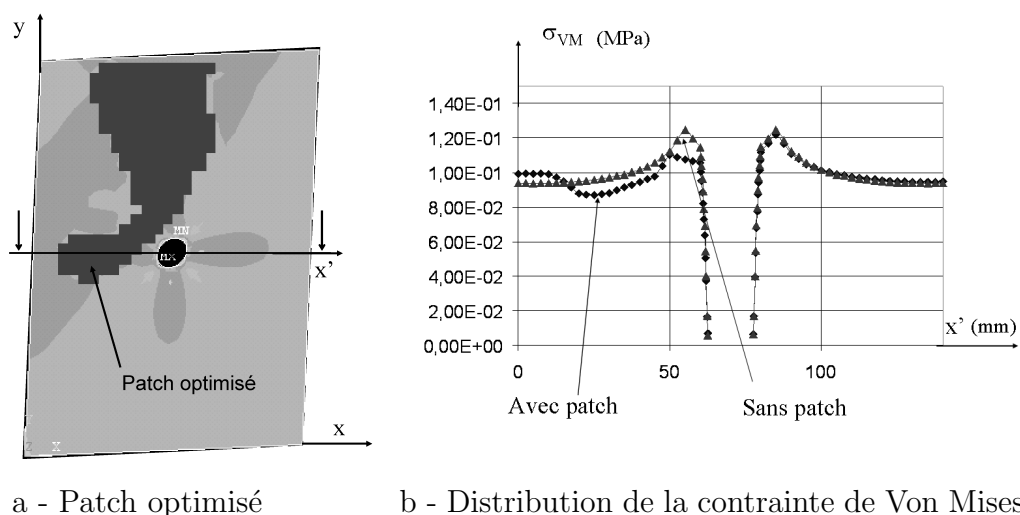


FIG. 3.7 – Structure renforcée de manière optimale et distribution de la contrainte de Von Mises dans la plaque d'aluminium.

L'AG a été lancé plusieurs fois avec des populations initiales différentes. La Figure

3.8 représente quelques unes des solutions représentatives trouvées qui appartiennent essentiellement à deux familles de formes. Sur la Figure 3.8, le premier patch correspond à une solution symétrique de l'optimum de la Figure 3.7a. Cette solution (ou une solution symétrique équivalente) a été trouvée plusieurs fois. La deuxième forme de patches observée correspond à une croix à trois branches. Cette forme peut être considérée comme étant la forme précédente enrichie d'une branche supplémentaire. Cette solution consiste aussi à dévier les contraintes dans un des coins de la structure, avec un renforcement supplémentaire dû à la troisième branche. La présence de deux formes principales de patches montre qu'il y a peu d'optima locaux en comparaison avec l'exemple précédent.

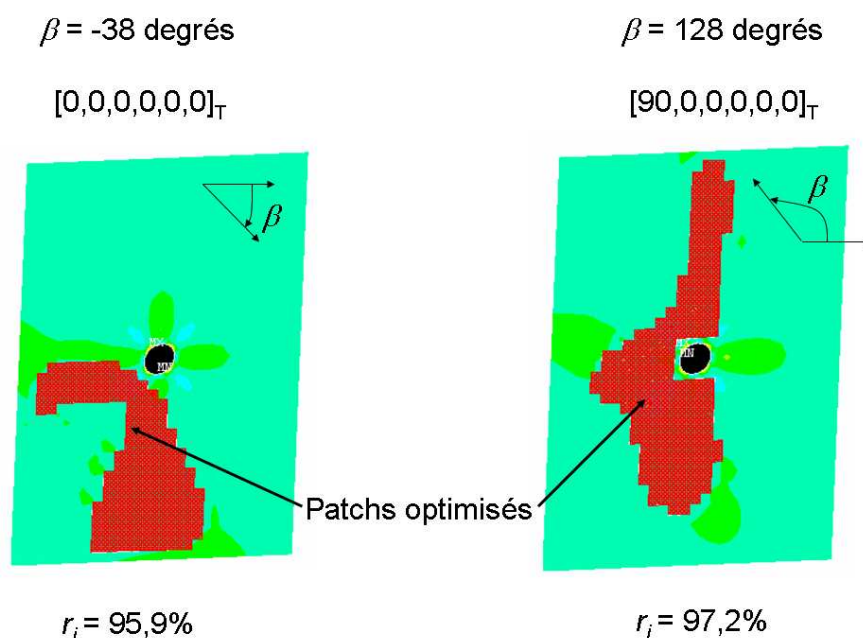


FIG. 3.8 – Patches optimisés dans le cas d'un essai de cisaillement.

3.2 Chargement cyclique

3.2.1 Fonction objectif

Le problème précédemment décrit est ici repris. Cette fois-ci, la plaque est soumise à un essai de fatigue et le but est de retarder l'apparition des fissures dans la zone à soulager. Un critère de limite élastique de type Von Mises ne suffit plus pour évaluer le niveau de renforcement. Afin de pouvoir retarder l'apparition des fissures, un critère de fatigue doit être utilisé. Parmi les critères multiaxiaux, le critère de Dang Van est le plus répandu [93]. Il est donc ici choisi afin de pouvoir évaluer de

manière pertinente le renforcement du patch composite sur le comportement en fatigue de la structure. C'est un critère à la fois spatial et temporel qui est basé sur un concept de « plan critique » et de « moment critique » : ce critère repose sur des indicateurs de dommages qui permettent de trouver le plan le plus endommageant au moment le plus endommageant [93].

Pour un plan matériel de normale \vec{h} , l'indicateur de dommages proposé par Dang Van est une combinaison linéaire de la pression hydrostatique $p(t)$ et de la contrainte de cisaillement alternée $\vec{\tau}_{ha}(t)$ au même moment t . Cette contrainte de cisaillement alternée $\vec{\tau}_{ha}(t)$ représente la déviation du vecteur cisaillement par rapport à sa valeur moyenne durant le cycle de chargement (voir Figure 3.9). Ce vecteur cisaillement est défini comme la projection du vecteur contrainte dans le plan perpendiculaire à \vec{h} .

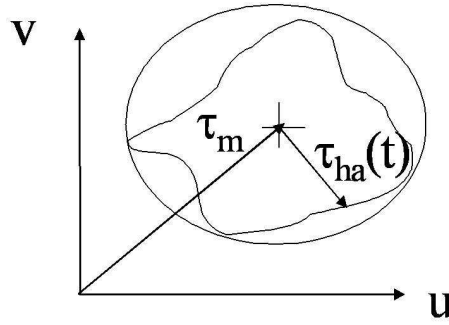


FIG. 3.9 – Définition de la contrainte de cisaillement $\vec{\tau}_{ha}(t)$.

La procédure nécessite de passer en revue tous les plans matériels possibles afin d'avoir accès à cet indicateur de dommages. De plus, chaque plan doit être analysé durant le cycle de chargement afin d'obtenir le moment critique. Finalement, le critère de Dang Van revient à une triple maximisation. En lui associant ce critère, la fonction objectif f_i de chaque individu est obtenue :

$$f_i = \max_{x,y} \max_{\vec{h}} \max_t (\|\vec{\tau}_{ha}(t)\| + \alpha p(t) - \beta) \quad (3.7)$$

Les coefficients α et β représentent des caractéristiques matérielles de fatigue liées aux limites d'endurance du matériau. En pratique, α et β peuvent être définis à partir de deux essais de fatigue. x et y varient entre les limites de la zone à soulager.

3.2.2 Modèle mécanique

Le cycle de chargement est représenté sur les Figures 3.10 et 3.11. Dans cet exemple, le chargement est biaxial : $\sigma_1(t)$ et $\sigma_2(t)$. Ces deux contraintes sont considérées comme constantes sur chaque demi-cycle. Chaque demi-cycle a la même durée. Les cycles utilisés dans l'aéronautique sont beaucoup plus complexes mais la procédure

resterait la même dans ce cas. $\sigma_1(t)$ est égale à 50 MPa (respectivement 100 MPa) durant la première (respectivement la seconde) partie du cycle. $\sigma_2(t)$ est égale à 200 MPa (respectivement 150 MPa) durant la première (respectivement la seconde) partie du cycle. Ce type de chargement correspond donc à un chargement non proportionnel.

Afin d'évaluer le critère de Dang Van, le cycle de chargement est discrétisé en deux parties qui correspondent aux deux types de chargements. Concrètement, cela revient à conduire deux calculs par éléments finis pour chaque individu.

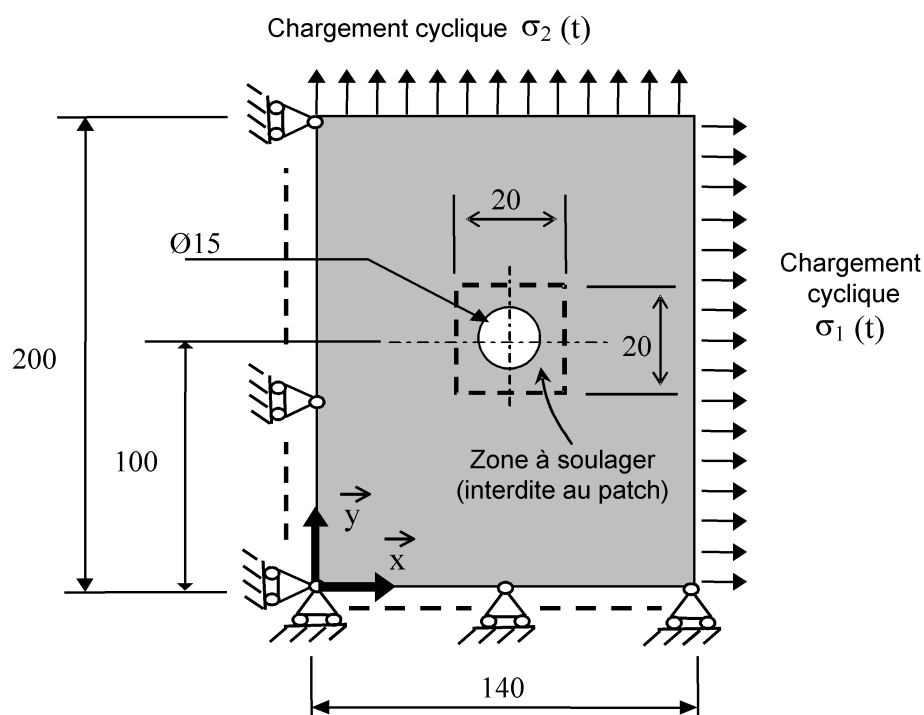


FIG. 3.10 – Description du problème de fatigue.

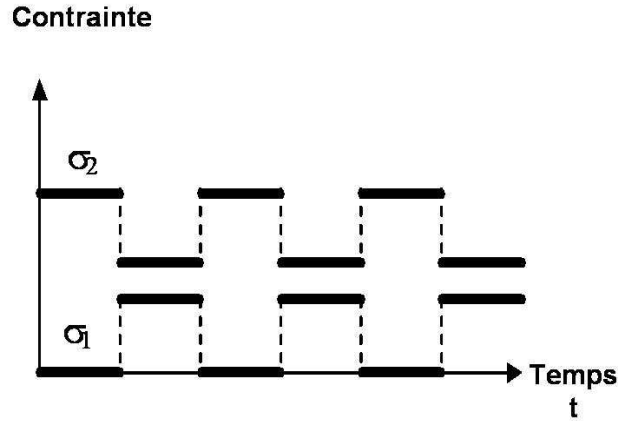


FIG. 3.11 – Description des cycles appliqués.

3.2.3 Patches optimisés

L'AG est appliqué de manière à obtenir le patch composite qui minimise le critère de Dang Van. L'algorithme converge au bout de 1 jour avec la même machine qu'au paragraphe 3.1.2. La Figure 3.12 présente 3 patches optimisés obtenus à partir de populations initiales différentes.

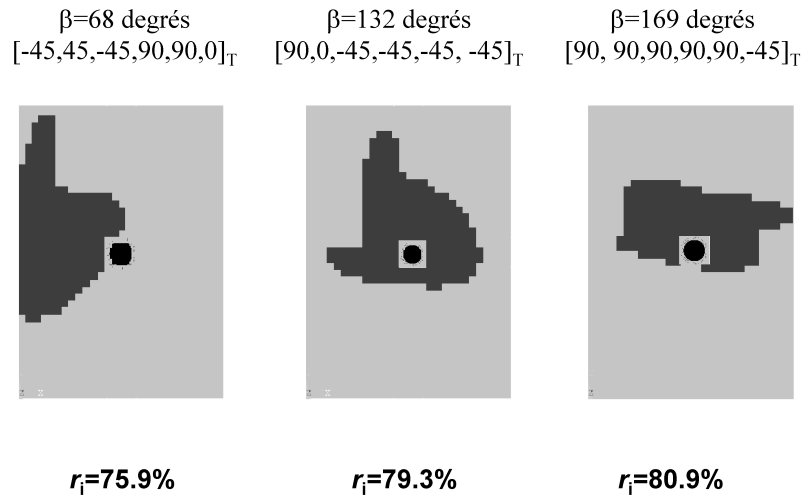


FIG. 3.12 – Patches optimisés dans le cas d'un chargement cyclique.

L'orientation globale β du meilleur composite est égale à 68 degrés et la séquence d'empilement est : $[-45 \ 45 \ -45 \ 90 \ 90 \ 0]_T$. La réduction du critère de Dang Van est de 24,1%. Durant le cycle, l'indicateur de dommages est maximal pour la seconde partie du chargement correspondant à $\sigma_1(t) = 100$ MPa et $\sigma_2(t) = 150$ MPa. Durant

l'optimisation, le cycle de chargement correspondant à l'indicateur de dommages le plus élevé n'est pas toujours le second : il diffère d'un patch à un autre. Par comparaison, un patch quasi isotrope réduit le critère de Dang Van de 5,9%.

Le patch optimisé n'entoure pas complètement la zone endommagée. Cela signifie que le renforcement du patch optimisé n'est pas que « local ». En effet, le renforcement n'est pas seulement une conséquence de la réduction de contraintes due à la proximité immédiate du patch composite. Le patch optimisé est logiquement situé près de la zone à soulager, mais une partie significative est localisée loin du trou, comme sur la partie gauche de la structure par exemple. En fait, le patch composite optimisé modifie le champ de contraintes dans *toute* la structure. Dans cet exemple, le renforcement combine à la fois du renforcement local et du renforcement global. La séquence d'empilement contribue astucieusement à ces deux types de renforcement. De plus, dans cet exemple, la variété des patchs optimisés est plus importante que dans le cas de l'essai de cisaillement, ce qui montre la présence d'un plus grand nombre d'optima locaux. Ces diverses solutions permettent de disposer d'une palette relativement riche pour choisir un patch vis-à-vis d'autres critères comme le cisaillement maximal dans la colle par exemple.

3.3 Application à une voilure d'avion

L'AG développé est maintenant appliqué à une structure plus proche de l'application finale qui est une voilure d'avion. L'exemple suivant ne comporte pas les caractéristiques géométriques et matérielles réelles ainsi que le chargement réel de la voilure d'un Alphajet. La zone la plus sollicitée se situe cependant là aussi à proximité de l'encastrement voilure-fuselage comme le montre la Figure 2.

3.3.1 Modèle mécanique

Un modèle mécanique proche de la voilure Alphajet a été réalisé à partir de plans fournis par l'AIA. Le modèle présenté diffère de la voilure réelle au sens où la géométrie et les caractéristiques matérielles ont été changées. La voilure est rigidifiée par neuf raidisseurs et quatre nervures. La Figure 3.13 représente le modèle de la voilure.

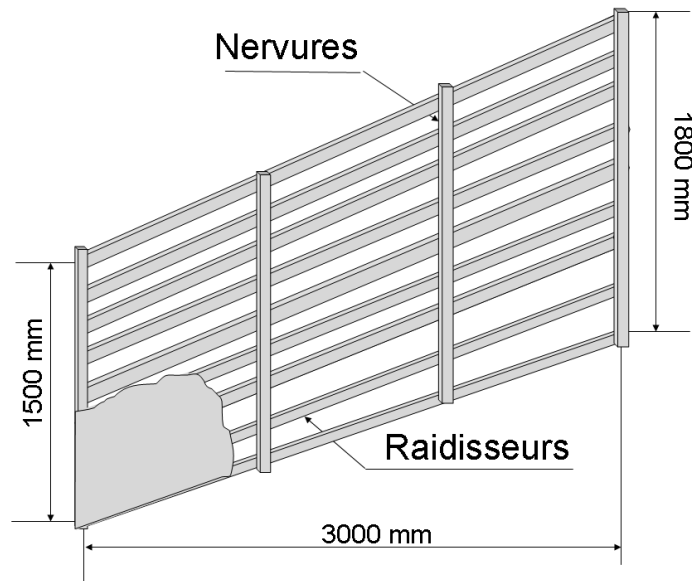


FIG. 3.13 – Modèle géométrique de la voilure.

La voilure complète est constituée d'aluminium 2024 T3 considéré comme élastique isotrope linéaire ($E = 72 \text{ GPa}$, $\nu = 0,32$) d'épaisseur 4 mm. Les moments d'inertie des raidisseurs et des nervures sont égaux à 1500 mm^2 . Les raidisseurs et les nervures sont répartis de manière équidistante sur la voilure. Le patch composite a les propriétés décrites dans le paragraphe 2.9.2.

3.3.2 Modélisation par éléments finis

Le code de calcul par éléments finis Ansys est utilisé pour la modélisation de cette voilure. Une modélisation plane est retenue. Les éléments SHELL93 sont choisis pour modéliser le corps de la voilure et des éléments de poutre BEAM4 sont retenus pour les raidisseurs et les nervures. Le chargement se réduit ici à un essai de traction. Plusieurs cas plus complexes devraient être étudiés pour traiter un cas réel. La Figure 3.14 représente le chargement et la contrainte de Von Mises dans la voilure non renforcée.

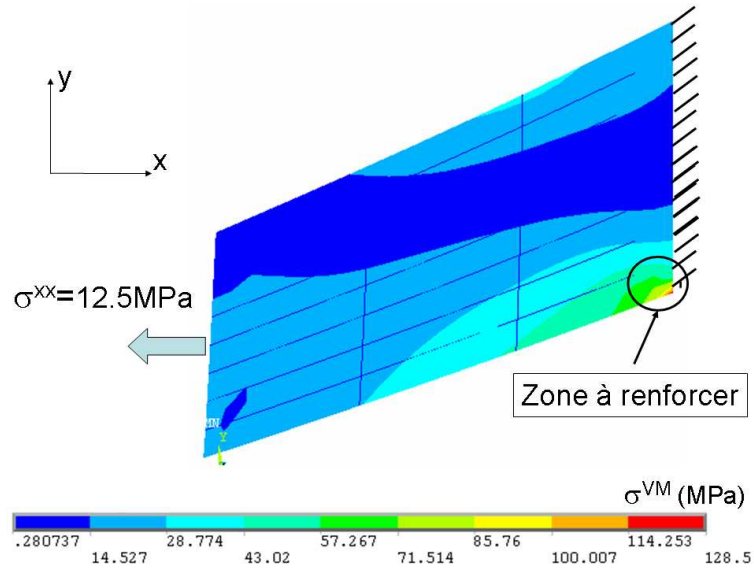


FIG. 3.14 – Chargement et distribution de la contrainte de Von Mises dans la voilure non renforcée.

Le calcul par éléments finis montre que des surcontraintes apparaissent en bas à droite de l'encastrement, ce qui correspond exactement à la zone où apparaissent les dommages dans la réalité.

3.3.3 Fonction objectif

La fonction objectif d'un individu i est obtenue en calculant la somme des normes des réactions aux appuis F sur une longueur égale à 225 mm dans le coin inférieur droit de l'encastrement, ce qui correspond au huitième de la longueur de l'encastrement. La fonction objectif f_i et la fonction d'adaptation F_i d'un individu i s'écrivent :

$$\begin{cases} f_i = \sum_k^{n_a} \|F\|_k \\ F_i = \sum_k^{n_a} \|F\|_k^{(\text{pire individu})} - \sum_k^{n_a} \|F\|_k \end{cases} \quad (3.8)$$

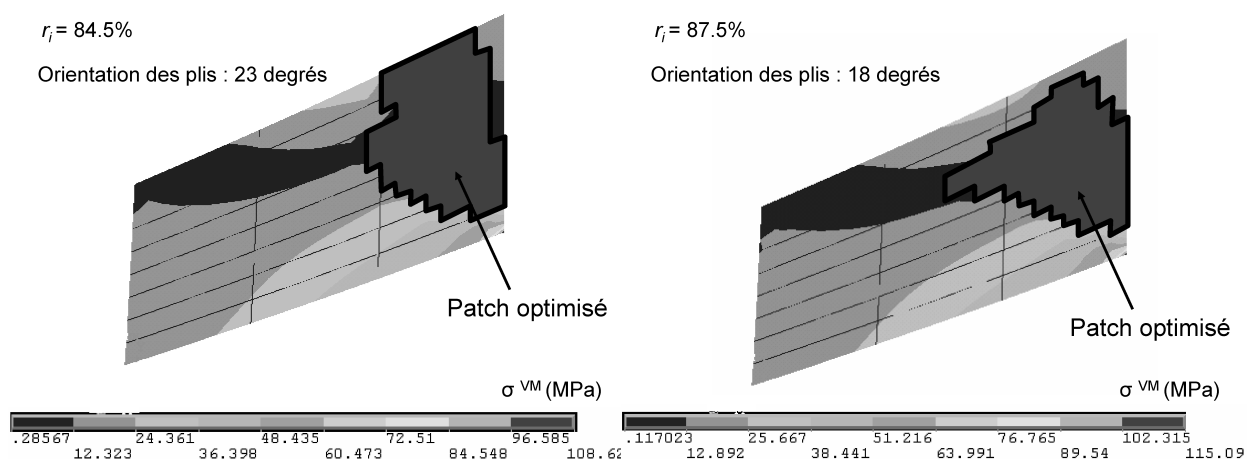
n_a correspond au nombre d'appuis sur une longueur égale à 225 mm de l'encastrement.

3.3.4 Patches optimisés

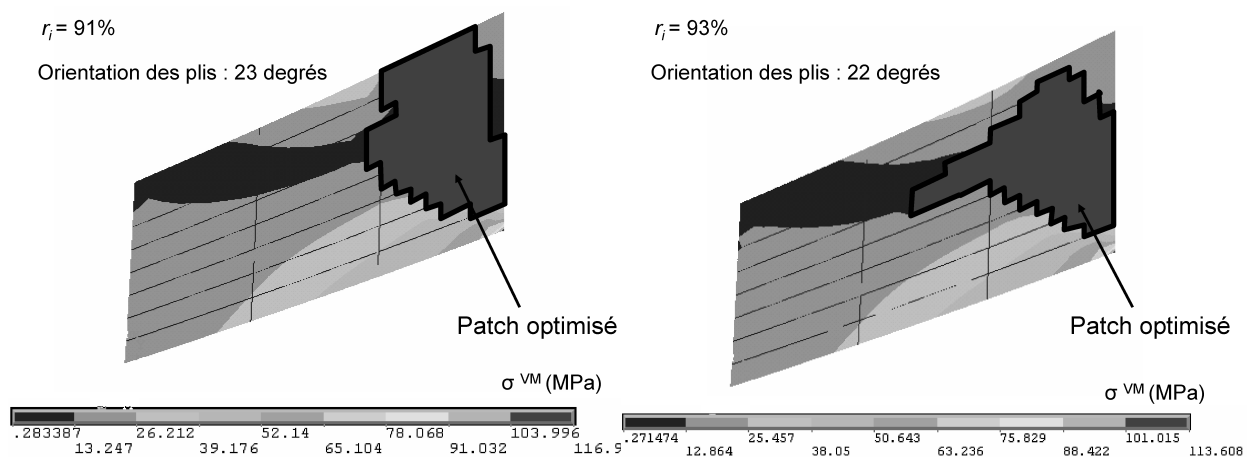
La somme des forces dans la zone critique est égale à 71880 N dans le cas de la structure non renforcée. La Figure 3.15 représente les patches optimisés trouvés pour différentes épaisseurs de renfort. Le meilleur patch optimisé, avec une épaisseur de 1,5 mm, diminue la somme des forces dans la zone critique de 15,5%. Cette réduction

peut paraître faible mais elle permet potentiellement d'augmenter la durée de vie résiduelle de la structure de manière importante, comme le montrerait un critère de fatigue. Le patch dévie les contraintes sur la partie supérieure de la voilure, afin de soulager la zone endommagée. Il est important de noter que cette partie supérieure est donc surchargée par rapport à la voilure initiale, mais elle possède *a priori* une réserve de durée de vie plus importante que la partie endommagée. Ce résultat peut être comparé à un patch rectangulaire collé dans le coin en bas à droite de la voilure, dont l'aire serait égale à 20% de la structure. Ce patch diminue de 4,7% la somme des forces.

L'orientation des plis du patch optimisé est homogène d'un pli à l'autre. Tous les plis sont orientés à 23 degrés par rapport à l'axe x . Cet angle est légèrement plus faible que l'angle des raidisseurs (environ 30 degrés).



a - Patches optimisés avec une épaisseur égale à 1,5 mm



b - Patches optimisés avec une épaisseur égale à 0,75 mm

FIG. 3.15 – Patches optimisés avec des épaisseurs variables et distribution de la contrainte de Von Mises dans la voilure renforcée.

Dans le cas où l'épaisseur du patch composite est égale à 0,75 mm, la meilleure solution est identique à celle trouvée dans le cas où l'épaisseur est égale à 1,5 mm. Les renforcements créés dans les deux cas sont similaires : le patch composite « attire » les contraintes dans la partie supérieure de la voilure. Cette solution a été trouvée plusieurs fois avec l'AG à partir de populations initiales différentes. De plus, l'AG trouve d'autres solutions très proches du meilleur patch optimisé. Les patches situés à droite de la Figure 3.15 sont quasi identiques à la meilleure solution, que ce soit en termes de géométrie ou d'orientation des plis (environ 20 degrés). Le fait de trouver plusieurs fois la même solution montre qu'il existe moins d'optima locaux que dans l'exemple précédent.

Une solution classique utilisée en maintenance aéronautique est de coller un patch d'aluminium afin de renforcer une zone endommagée. Cette méthode présente l'avantage que l'ensemble structure/renfort possède le même coefficient de dilatation, ce qui évite l'apparition de contraintes dues à la différence des coefficients de dilatation en cas de variation de température. La Figure 3.16 représente des patches en aluminium optimisés avec une épaisseur de 1,5 mm.

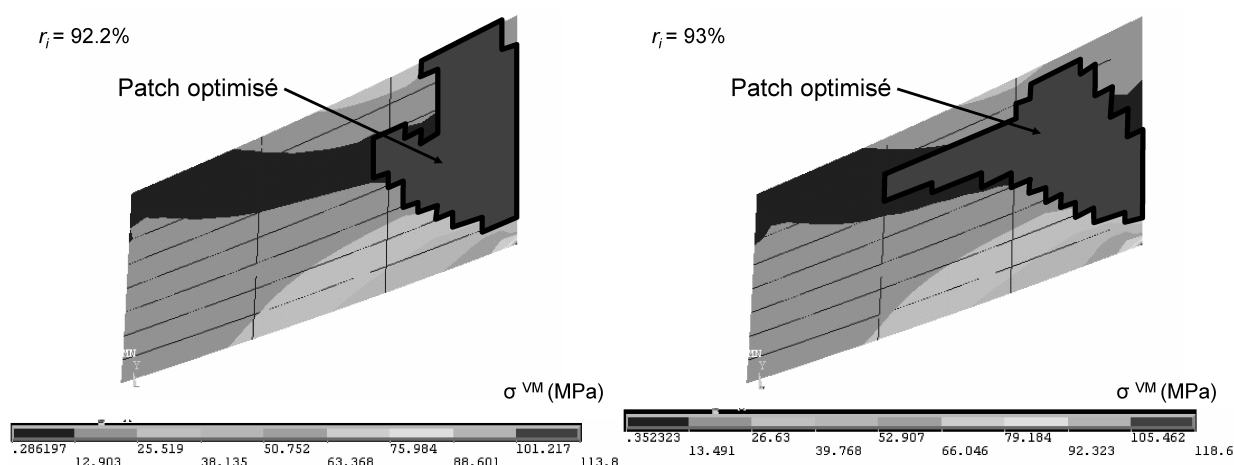


FIG. 3.16 – Patches en aluminium optimisés avec une épaisseur de 1,5 mm.

Les formes de ces patches en aluminium sont très proches des patches optimisés en composite. La stratégie adoptée par l'AG est, là aussi, de dévier le flux de contraintes dans la partie supérieure droite de la voilure. Le meilleur patch diminue la fonction objectif de 7,8%. Cette valeur est à comparer avec la valeur du meilleur patch optimisé en composite, soit 15,5%. En d'autres termes, le patch composite renforce environ deux fois plus qu'un patch en aluminium pour une épaisseur donnée, sans doute grâce à son anisotropie et à sa rigidité suivant les fibres supérieure à l'aluminium. De plus, il est à noter que le composite est environ 1,8 fois plus léger que l'aluminium ce qui souligne encore l'intérêt du composite.

Les exemples précédents sont les premiers qui ont été obtenus avec une voilure complète. D'autres études sont bien sûr nécessaires pour mieux apprécier l'apport effectif des patchs optimisés. En particulier, d'autres chargements, critères, épaisseurs ou surfaces de patchs mériteraient d'être examinés, mais nous avons jugé que ces tâches sortaient du cadre de ce travail.

3.4 Conclusion

L'algorithme génétique a été appliqué à différents cas de renforcement de structures de complexité croissante. La Figure 3.17 résume les différents cas traités. Dans tous les cas, le patch optimisé renforce de manière plus importante que des patchs composites aux formes simples. Un autre point important de ces applications réside dans la fonction objectif utilisée pour évaluer la pertinence des solutions proposées. Cette fonction objectif a été adaptée et développée suivant le cas traité. C'est ainsi que la contrainte de Von Mises a été utilisée dans le cas d'essais statiques et que le critère de Dang Van a été développé dans le cas d'un essai de fatigue. Pour l'application sur une voilure, la somme des réactions aux appuis a été jugée comme critère pertinent pour l'évaluation des patchs composites, mais d'autres critères pourraient facilement être testés. Il est à noter qu'il est important d'étudier la zone où est redistribué le flux de contraintes. En effet, il ne faut pas rediriger les contraintes dans des zones pouvant provoquer la défaillance de la structure.

Un des points qui n'a pas été traité est l'analyse du collage. En effet, l'algorithme développé ne prend pas en compte les contraintes dans la colle du fait de son caractère bidimensionnel simplificateur. Or, lorsqu'un renfort composite est collé sur une structure, une zone de transfert des efforts du substrat vers le composite apparaît comme souligné dans le chapitre 1. Cette zone de transfert d'effort entraîne des contraintes importantes dans la colle qui sont à l'origine de la plupart des défaillances [21]. Il devient alors nécessaire d'étudier ce phénomène pour quantifier ce niveau de contraintes dans la colle dans le cas de patchs optimisés.

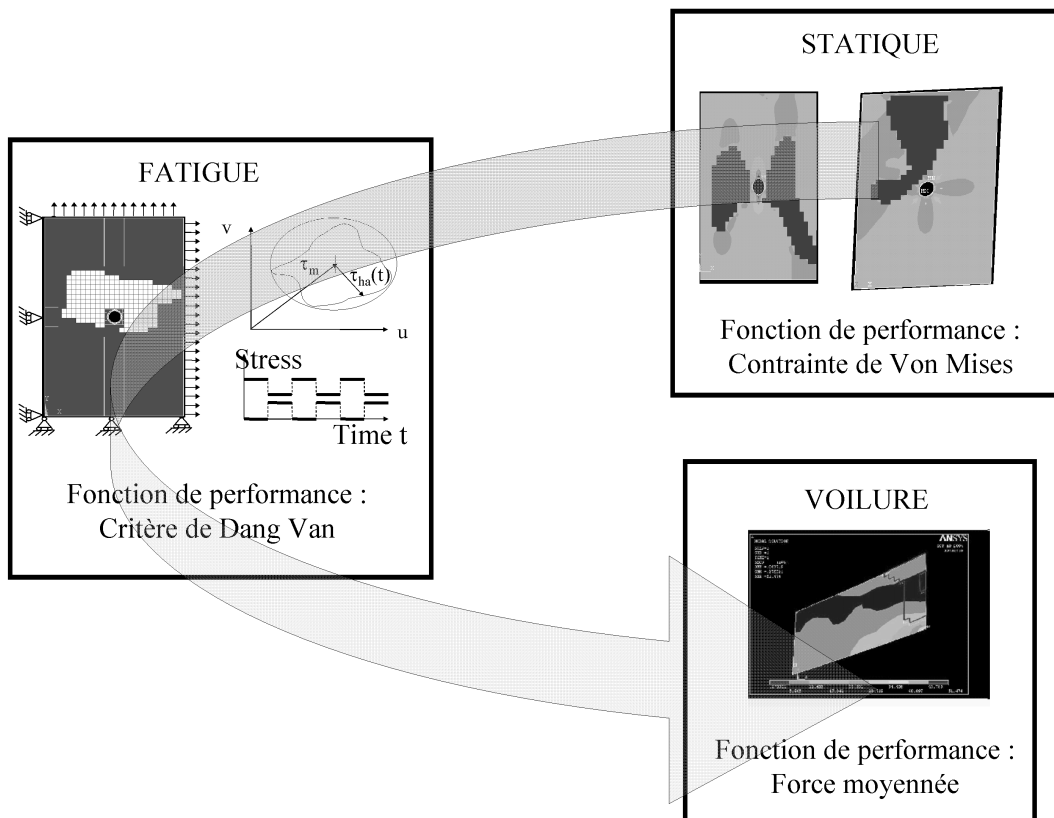


FIG. 3.17 – Résumé du chapitre 3.

Troisième partie

Analyse théorique du renforcement de structure par matériau composite

Chapitre 4

Analyse bidimensionnelle du renforcement de structures

4.1 Introduction générale

Le point faible du renforcement par matériaux composites réside dans la colle qui permet de solidariser le renfort au substrat. En effet, 53% des défaillances constatées dans les structures aéronautiques ainsi réparées sont dues à la colle d'après la référence [21]. Ces défaillances sont essentiellement dues au transfert d'effort du substrat vers le patch composite. Cette zone de transfert d'effort entraîne en effet un pic de cisaillement à proximité du bord libre du patch composite.

Le calcul des distributions de contraintes est donc un point important pour proposer une solution de renforcement adaptée. Plusieurs modèles ont été développés sous certaines hypothèses comme Volkersen [91] ou Goland et Reissner [29] par exemple. Ces modèles permettent de calculer quelques solutions analytiques des champs de contraintes dans la colle et dans le composite [2]. Plus récemment, ces théories ont été raffinées, en intégrant, par exemple, de grands déplacements [58], le comportement élasto-plastique de la colle [35] [34] ou de nouvelles hypothèses sur la distribution des contraintes dans l'épaisseur [86]. D'autres apports peuvent être cités comme l'influence de la géométrie du bord libre [84] ou encore l'étude de composite épais [81]. Il est important de noter que de telles théories sont unidirectionnelles, au sens où la structure renforcée est soumise à des conditions de chargement simples et que les contraintes sont calculées suivant un modèle de poutre renforcée. Les structures renforcées sont cependant plus complexes. Par exemple, les structures aéronautiques réparées ou renforcées par patches composites sont typiquement des structures bidimensionnelles soumises à des états de contraintes plus compliqués que les tests usuels de cisaillement de joints collés [11] [9]. L'étude bidimensionnelle de structures renforcées par matériaux composites est très peu courante dans la littérature. Des effets

bidimensionnels dus à un couplage entre les différentes directions sont susceptibles d'intervenir. Ils sont principalement dus à la différence des coefficients de Poisson entre le substrat et le composite.

Le but de ce chapitre est de calculer la distribution des contraintes dans le patch composite et dans la colle avec une approche bidimensionnelle afin de prendre en compte l'effet de Poisson. La première partie concerne l'étude de patches rectangulaires. Une approche analytique est développée pour cela. Cette approche permet de comprendre les mécanismes mis en jeu pour une géométrie simple et de connaître l'influence des divers paramètres via une étude paramétrique. La deuxième partie concerne l'étude de patches de formes complexes en utilisant une approche numérique. Cette approche permet d'analyser l'influence de la topologie du patch composite sur les distributions des contraintes dans le patch composite et dans la colle. Cette seconde étude permet aussi de calculer l'état mécanique interne des patches composites optimisés dans le premier chapitre.

4.2 Modèle mécanique

4.2.1 Hypothèses et notations

Le but de ce travail est de calculer les distributions bidimensionnelles des contraintes dans la colle et dans le patch composite dans le cas où ce dernier est de forme rectangulaire (voir Figure 4.1). Il faut souligner que ce problème, apparemment simple vu sa géométrie, n'a semble-t-il pas été traité dans la littérature abondante disponible sur le collage, ce qui justifie l'étude présentée dans ce paragraphe.

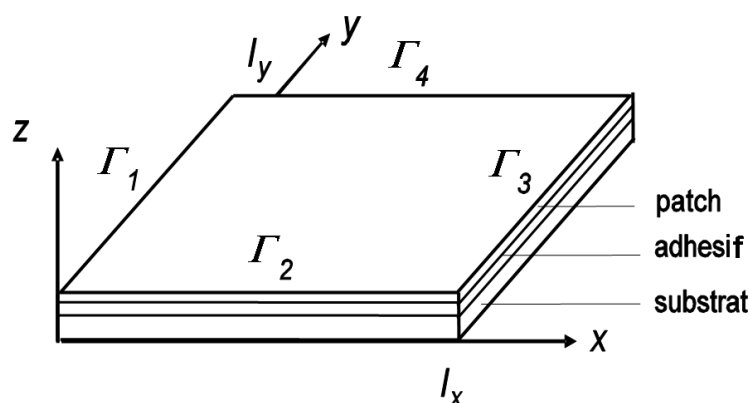


FIG. 4.1 – Géométrie du patch composite.

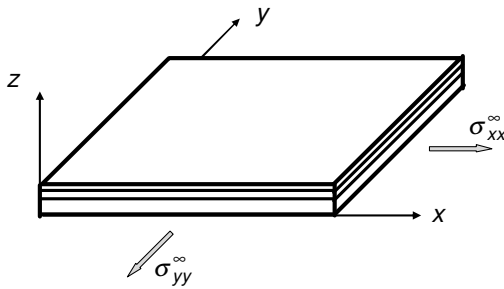
Les notations suivantes sont utilisées :

- l_x et l_y représentent la longueur et la largeur du patch composite ;
- e_p , e_s et e_a représentent les épaisseurs du patch, du substrat et de la colle ;
- σ_{xx}^p , σ_{yy}^p et σ_{xy}^p représentent les contraintes dans le patch composite ;
- σ_{xx}^s , σ_{yy}^s et σ_{xy}^s représentent les contraintes dans le substrat ;
- σ_{xz}^a et σ_{yz}^a représentent les contraintes de cisaillement dans la colle ;
- E_x , E_y , ν_{xy} et G_{xy} représentent les caractéristiques matérielles du patch composite considéré comme élastique linéaire orthotrope ;
- E_s et ν_s représentent les caractéristiques matérielles du substrat considéré comme élastique linéaire isotrope ;
- G_a représente le module de cisaillement de la colle considérée comme élastique linéaire isotrope.

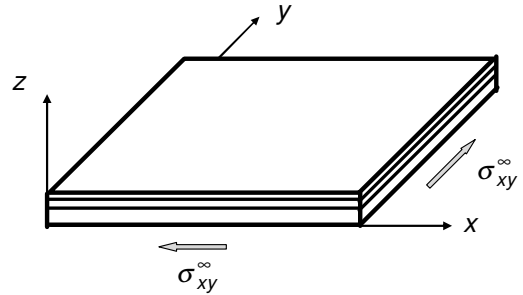
Le matériau composite et le substrat sont soumis à un chargement plan seulement. La colle n'est soumise qu'aux contraintes de cisaillement transverses dans l'épaisseur. Les contraintes de chacun des matériaux dépendent à la fois de la direction x et de la direction y . Les contraintes de chacun des matériaux sont supposées constantes suivant la direction z .

Dans les paragraphes suivants, le but est de trouver une solution analytique dans deux cas :

- le substrat est soumis à des contraintes normales suivant x et y (voir Figure 4.2-a) ;
- le substrat est soumis à des contraintes de cisaillement dans le plan x - y (voir Figure 4.2-b).



a - Cas 1 : substrat soumis à des contraintes normales seulement



b - Cas 2 : substrat soumis à des contraintes de cisaillement seulement

FIG. 4.2 – Cas étudiés.

4.2.2 Plan de l'étude

Les calculs, relativement complexes, méritent un plan introductif qui donne les différentes étapes :

- le paragraphe 4.2.3 développe les équations d'équilibre dans le cas bidimensionnel ;

- le paragraphe 4.3 est consacré au cas d'un essai de traction qui est lui-même découpé en six sous-parties :
 - les équations d'équilibre dans le cas d'un essai de traction sont développées dans le paragraphe 4.3.1 ;
 - le paragraphe 4.3.2 exprime les conditions aux limites sur Γ_2 et Γ_4 ;
 - le paragraphe 4.3.3 propose une expression analytique de σ_{xx}^p ;
 - le paragraphe 4.3.4 transforme les conditions aux limites sur Γ_2 et Γ_4 en séries de Fourier ;
 - le paragraphe 4.3.5 propose le calcul d'un déphasage permettant le calcul théorique de σ_{xx}^p ;
 - le paragraphe 4.3.6 conclue les différents développements effectués dans le cas d'un essai de traction ;
- le paragraphe 4.4 est consacré au cas d'un essai de cisaillement qui est lui-même découpé en deux sous-parties :
 - les équations d'équilibre dans le cas d'un essai de cisaillement sont développées dans le paragraphe 4.4.1 ;
 - la résolution de l'équation différentielle obtenue avec une double série de Fourier est présentée dans le paragraphe 4.4.2.

4.2.3 Equations d'équilibre dans le cas bidimensionnel

L'étude de l'équilibre dans le cas unidimensionnel est classique. Ce point est rappelé au chapitre 1. Examinons ici les modifications apportées par la prise en compte du caractère bidimensionnel du problème. L'équilibre d'une partie représentative du patch composite (voir Figure 4.3) s'écrit dans ce cas :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{xx}^p}{\partial x} e_p - \sigma_{xz}^a + \frac{\partial \sigma_{xy}^p}{\partial y} e_p = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yy}^p}{\partial y} e_p - \sigma_{yz}^a + \frac{\partial \sigma_{xy}^p}{\partial x} e_p = 0 \end{array} \right. \quad (4.1)$$

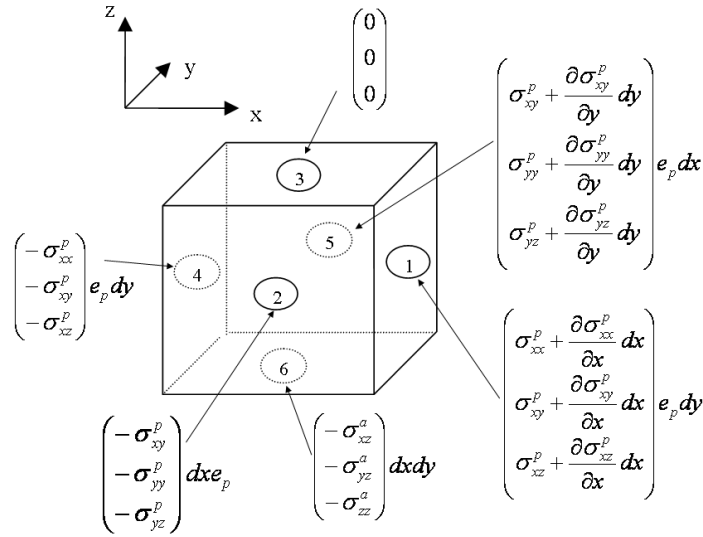


FIG. 4.3 – Equilibre d'une partie représentative du patch composite.

De la même manière, l'équilibre d'une partie représentative du substrat s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma^s_{xx}}{\partial x} e_p + \sigma^a_{xz} + \frac{\partial \sigma^p_{xy}}{\partial y} e_p = 0 \\ \frac{\partial \sigma^s_{yy}}{\partial y} e_p + \sigma^a_{yz} + \frac{\partial \sigma^p_{xy}}{\partial x} e_p = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

Ce système d'équations différentielles présente 5 inconnues pour 2 équations. Des hypothèses supplémentaires, dépendant du cas traité, sont donc nécessaires de manière à ajouter 3 nouvelles équations afin de résoudre ce système uniquement avec les contraintes comme inconnues.

4.3 Essai de traction

4.3.1 Equations d'équilibre du patch

Le cas où le substrat est soumis à un essai de traction suivant les directions x et y est considéré dans ce paragraphe (voir Figure 4.2-a). La contrainte de cisaillement plan dans le patch composite est supposée négligeable étant donné le faible module de cisaillement du matériau composite. Cette hypothèse a été vérifiée par des calculs préliminaires par éléments finis. Dans ce cas, l'équilibre entre le patch composite et le substrat se réduit à :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}^p}{\partial x} e_p = \sigma_{xz}^a \\ \frac{\partial \sigma_{yy}^p}{\partial y} e_p = \sigma_{yz}^a \end{cases} \quad (4.3)$$

et :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}^s}{\partial x} e_s = -\sigma_{xz}^a \\ \frac{\partial \sigma_{yy}^s}{\partial y} e_s = -\sigma_{yz}^a \end{cases} \quad (4.4)$$

Les Equations (4.3) et (4.4) sont combinées afin d'obtenir les équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} (e_p \sigma_{xx}^p + e_s \sigma_{xx}^s) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} (e_p \sigma_{yy}^p + e_s \sigma_{yy}^s) = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

Les conditions aux limites sur les frontières Γ_1 et Γ_3 (voir Figure 4.1) s'écrivent :

$$\begin{cases} \sigma_{xx}^s = \sigma_{xx}^\infty \\ \sigma_{xx}^p = 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

De la même manière, les conditions aux limites sur les frontières Γ_2 et Γ_4 sont les suivantes :

$$\begin{cases} \sigma_{yy}^s = \sigma_{yy}^\infty \\ \sigma_{yy}^p = 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

Dans la suite, les calculs sont seulement menés suivant la direction x . Les résultats suivant la direction y sont similaires et ne sont donc pas détaillés. En supposant que la distribution des forces suivant x ne dépende pas de y , l'Equation (4.5) peut être intégrée, ce qui donne :

$$\begin{cases} e_p \sigma_{xx}^p + e_s \sigma_{xx}^s = e_s \sigma_{xx}^\infty \\ e_p \sigma_{yy}^p + e_s \sigma_{yy}^s = e_s \sigma_{yy}^\infty \end{cases} \quad (4.8)$$

La contrainte dans le substrat est alors exprimée comme une combinaison de la contrainte dans le patch et des contraintes limites appliquées au substrat σ_{xx}^∞ et σ_{yy}^∞ :

$$\begin{cases} \sigma_{xx}^s = \sigma_{xx}^\infty - \frac{e_p}{e_s} \sigma_{xx}^p \\ \sigma_{yy}^s = \sigma_{yy}^\infty - \frac{e_p}{e_s} \sigma_{yy}^p \end{cases} \quad (4.9)$$

La contrainte de cisaillement transverse σ_{xz}^a est supposée constante à travers l'épaisseur de la colle et s'écrit quant à elle :

$$\sigma_{xz}^a = G_a \gamma_{xz}^a = G_a \frac{(u_x^p - u_x^s)}{e_a} \quad (4.10)$$

où u_x^p et u_x^s sont les déplacements suivant x du patch et du substrat. Ces deux dernières équations sont introduites dans l'Equation (4.3)-a, ce qui conduit à :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}^p}{\partial x} = G_a \frac{(u_x^p - u_x^s)}{e_a e_p} \quad (4.11)$$

Cette équation est ensuite dérivée afin d'introduire la déformation longitudinale dans la colle et dans le substrat :

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xx}^p}{\partial x^2} = G_a \frac{(\varepsilon_{xx}^p - \varepsilon_{xx}^s)}{e_a e_p} \quad (4.12)$$

Les lois de comportement linéaires élastiques du patch composite et de la colle sont alors introduites :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx}^p = \frac{1}{E_x} \sigma_{xx}^p - \frac{\nu_{xy}}{E_x} \sigma_{yy}^p \\ \varepsilon_{xx}^s = \frac{1}{E_s} \sigma_{xx}^s - \frac{\nu_s}{E_s} \sigma_{yy}^s \end{cases} \quad (4.13)$$

Ces dernières équations sont introduites dans l'Equation (4.12), ce qui conduit à :

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xx}^p}{\partial x^2} = \frac{G_a}{e_a e_p} \left(\frac{1}{E_x} \sigma_{xx}^p - \frac{\nu_{xy}}{E_x} \sigma_{yy}^p - \frac{1}{E_s} \sigma_{xx}^s + \frac{\nu_s}{E_s} \sigma_{yy}^s \right) \quad (4.14)$$

Des résultats identiques sont obtenus suivant la direction y :

$$\frac{\partial^2 \sigma_{yy}^p}{\partial y^2} = \frac{G_a}{e_a e_p} \left(\frac{1}{E_y} \sigma_{yy}^p - \frac{\nu_{yx}}{E_y} \sigma_{xx}^p - \frac{1}{E_s} \sigma_{yy}^s + \frac{\nu_s}{E_s} \sigma_{xx}^s \right) \quad (4.15)$$

Les Equations (4.9) sont ensuite introduites dans les Equations (4.14) et (4.15), ce qui donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \sigma_{xx}^p}{\partial x^2} = \frac{G_a}{e_a e_p} \left[\frac{1}{E_x} \sigma_{xx}^p - \frac{\nu_{xy}}{E_x} \sigma_{yy}^p - \frac{1}{E_s} (\sigma_{xx}^\infty - \frac{e_p}{e_s} \sigma_{xx}^p) + \frac{\nu_s}{E_s} (\sigma_{yy}^\infty - \frac{e_p}{e_s} \sigma_{yy}^p) \right] \\ \frac{\partial^2 \sigma_{yy}^p}{\partial y^2} = \frac{G_a}{e_a e_p} \left[\frac{1}{E_y} \sigma_{yy}^p - \frac{\nu_{yx}}{E_y} \sigma_{xx}^p - \frac{1}{E_s} (\sigma_{yy}^\infty - \frac{e_p}{e_s} \sigma_{yy}^p) + \frac{\nu_s}{E_s} (\sigma_{xx}^\infty - \frac{e_p}{e_s} \sigma_{xx}^p) \right] \end{array} \right. \quad (4.16)$$

Le système précédent peut se réécrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \sigma_{xx}^p}{\partial x^2} = A \sigma_{xx}^p + B \sigma_{yy}^p + C \\ \frac{\partial^2 \sigma_{yy}^p}{\partial y^2} = D \sigma_{xx}^p + E \sigma_{yy}^p + F \end{array} \right. \quad (4.17)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \frac{G_a}{e_a} \left(\frac{1}{e_p E_x} + \frac{1}{e_s E_s} \right) \\ B = -\frac{G_a}{e_a} \left(\frac{\nu_{xy}}{e_p E_x} + \frac{\nu_s}{e_s E_s} \right) \\ C = \frac{G_a}{e_a e_p} \left(\frac{\nu_s}{E_s} \sigma_{yy}^\infty - \frac{1}{E_s} \sigma_{xx}^\infty \right) \\ D = -\frac{G_a}{e_a} \left(\frac{\nu_{yx}}{e_p E_y} + \frac{\nu_s}{e_s E_s} \right) \\ E = \frac{G_a}{e_a} \left(\frac{1}{e_p E_y} + \frac{1}{e_s E_s} \right) \\ F = \frac{G_a}{e_a e_p} \left(\frac{\nu_s}{E_s} \sigma_{xx}^\infty - \frac{1}{E_s} \sigma_{yy}^\infty \right) \end{array} \right. \quad (4.18)$$

En dérivant deux fois suivant y la première équation du système (4.17) et en introduisant la seconde équation du système afin d'éliminer $\frac{\partial^2 \sigma_{yy}^p}{\partial y^2}$, l'équation différentielle (4.19) est obtenue :

$$\frac{\partial^4 \sigma_{xx}^p}{\partial x^2 \partial y^2} - A \frac{\partial^2 \sigma_{xx}^p}{\partial y^2} - E \frac{\partial^2 \sigma_{xx}^p}{\partial x^2} + (EA - BD) \sigma_{xx}^p + CE - FB = 0 \quad (4.19)$$

qui se réécrit :

$$\frac{\partial^4 \sigma_{xx}^p}{\partial x^2 \partial y^2} - A \frac{\partial^2 \sigma_{xx}^p}{\partial y^2} - E \frac{\partial^2 \sigma_{xx}^p}{\partial x^2} + G \sigma_{xx}^p + H = 0 \quad (4.20)$$

avec $G = EA - BD$ et $H = CE - FB$. Avant de résoudre cette équation dans le cas général, les conditions aux limites sur σ_{xx}^p doivent être clairement définies sur toute la frontière Γ . Elles sont en fait partiellement définies dans l'Equation (4.6), le long de Γ_1 et Γ_3 définis Figure 4.1. Les conditions aux limites le long de Γ_2 et Γ_4 sont quant à elles données en fonction de σ_{yy}^p dans l'Equation (4.7). σ_{xx}^p doit donc être déterminé le long de ces parties de frontière, ce qui constitue l'objectif du paragraphe suivant. Les résultats obtenus seront alors pris comme conditions aux limites pour résoudre l'Equation (4.20) dans le paragraphe 4.3.3.

4.3.2 Détermination de σ_{xx}^p le long de Γ_2 et Γ_4

Les conditions aux limites le long de Γ_2 et Γ_4 sont données en fonction de σ_{yy}^p dans l'Equation (4.7). Elles sont ensuite introduites dans la première équation du système (4.16). Cela conduit à l'équation suivante où la fonction notée $\sigma_{xx}^\Gamma = \sigma_{xx}(x, 0) = \sigma_{xx}(x, l_y)$ est l'inconnue :

$$\frac{d^2 \sigma_{xx}^\Gamma}{dx^2} - A \sigma_{xx}^\Gamma = C \quad (4.21)$$

avec A et C déjà défini en (4.18). Les conditions aux limites le long de Γ_1 et Γ_3 s'écrivent :

$$\begin{cases} \sigma_{xx}^\Gamma(0) = 0 \\ \sigma_{xx}^\Gamma(l_x) = 0 \end{cases} \quad (4.22)$$

La solution de l'Equation (4.21) peut s'écrire comme une combinaison de cosh et de sinh :

$$\sigma_{xx}^\Gamma(x) = C_1 \cosh(\sqrt{A}x) + C_2 \sinh(\sqrt{A}x) - \frac{C}{A} \quad (4.23)$$

Avec les conditions aux limites précédentes, C_1 et C_2 peuvent être calculés et σ_{xx}^Γ s'écrit finalement :

$$\sigma_{xx}^\Gamma(x) = \frac{C}{A} [\cosh(\sqrt{A}x) + (\frac{1 - \cosh(\sqrt{A}l_x)}{\sinh(\sqrt{A}l_x)} \sinh(\sqrt{A}x)) - \frac{C}{A}] \quad (4.24)$$

La contrainte dans le patch composite atteint 95% de sa valeur limite au bout d'une longueur L_{tx} dite longueur de transfert qui est égale à :

$$L_{tx} \simeq \frac{3}{\sqrt{A}} \quad (4.25)$$

4.3.3 Expression analytique de σ_{xx}^p

Le but est maintenant de trouver la solution de l'Equation (4.20). A ce stade, les conditions aux limites sont connues le long de la frontière du domaine. Elles sont données par l'Equation (4.6) pour Γ_1 et Γ_3 , et l'Equation (4.24) pour Γ_2 et Γ_4 . La solution proposée pour l'Equation (4.20) est de la forme :

$$\sigma_{xx}^p(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} F_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{l_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi(\Phi_m + y)}{(2\Phi_m + l_y)}\right) \quad (4.26)$$

Φ_m représente un décalage de l'origine le long de la direction y qui est déterminé par la suite. Une telle solution est proposée car une solution plus simple comme $\sin(\frac{n\pi y}{l_y})$ ne satisfait pas les conditions aux limites pour Γ_2 et Γ_4 . Il est facile de vérifier que lorsque $\Phi_m \rightarrow +\infty$, cette solution tend vers une solution unidimensionnelle classique. Φ_m peut en fait être interprété comme une quantité qui renseigne sur la nature bidimensionnelle du problème de renforcement. La propriété d'orthogonalité de la fonction sinus est utilisée par la suite pour trouver les coefficients F_{mn} qui caractérisent la solution. Elle s'écrit :

$$\int_0^T \sin(m\omega x) \sin(n\omega x) dx = \frac{T}{2} \delta_{mn} \quad (4.27)$$

où $T = \frac{2\pi}{\omega}$. δ_{mn} est le symbole de Kronecker défini par :

$$\begin{cases} \delta_{mn} = 0 \text{ si } m \neq n \\ \delta_{mn} = 1 \text{ si } m = n \end{cases} \quad (4.28)$$

L'Equation (4.26) est introduite dans l'Equation (4.20) et la propriété d'orthogonalité de l'Equation (4.27) est appliquée en intégrant suivant x entre 0 et l_x et suivant y entre $-\Phi_m$ et $\Phi_m + l_y$, ce qui conduit à :

$$\int_0^{l_x} \int_{-\Phi_m}^{\Phi_m+l_y} F_{mn} I_{mn} \sin^2\left(\frac{m\pi x}{l_x}\right) \sin^2\left(\frac{n\pi(\Phi_m+y)}{(2\Phi_m+l_y)}\right) dx dy = -H \int_0^{l_x} \int_{-\Phi_m}^{\Phi_m+l_y} \sin\left(\frac{m\pi x}{l_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi(\Phi_m+y)}{(2\Phi_m+l_y)}\right) dx dy \quad (4.29)$$

où :

$$I_{mn} = \left[\left(\frac{m\pi}{l_x}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{2\Phi_m+l_y}\right)^2 + A\left(\frac{n\pi}{2\Phi_m+l_y}\right)^2 + E\left(\frac{m\pi}{l_x}\right)^2 + G\right] \quad (4.30)$$

L'Equation (4.29) devient :

$$\begin{aligned} F_{mn} I_{mn} \left(\frac{l_x}{4}\right) \left[y - \frac{(2\Phi_m+l_y)}{2n\pi} \sin\left(\frac{2n\pi(\Phi_m+y)}{(2\Phi_m+l_y)}\right)\right]_{-\Phi_m}^{\Phi_m+l_y} = \\ -H \frac{l_x}{m\pi} \left[\cos\left(\frac{m\pi x}{l_x}\right)\right]_0^{l_x} \left[\frac{(2\Phi_m+l_y)}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi(\Phi_m+y)}{(2\Phi_m+l_y)}\right)\right]_{-\Phi_m}^{\Phi_m+l_y} \end{aligned} \quad (4.31)$$

soit :

$$F_{mn} I_{mn} \left(\frac{l_x}{4}\right) [2\Phi_m + l_y] = -H \frac{l_x(2\Phi_m+l_y)}{mn\pi^2} [\cos(m\pi) - 1][\cos(n\pi) - 1] \quad (4.32)$$

Les coefficients F_{mn} s'écrivent finalement :

$$F_{mn} = \frac{-4H \frac{(2\Phi_m+l_y)}{mn\pi^2} [\cos(m\pi) - 1][\cos(n\pi) - 1]}{I_{mn}[2\Phi_m+l_y]} \quad (4.33)$$

ou encore :

$$\begin{cases} F_{mn} = \frac{-16H}{mn\pi^2 I_{mn}} \text{ pour } m \text{ et } n \text{ impairs} \\ F_{mn} = 0 \text{ pour } m \text{ ou } n \text{ pairs} \end{cases} \quad (4.34)$$

La contrainte σ_{xx}^p s'écrit finalement :

$$\sigma_{xx}^p(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-16H}{mn\pi^2 I_{mn}} \sin\left(\frac{m\pi x}{l_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi(\Phi_m + y)}{(2\Phi_m + l_y)}\right) \quad (4.35)$$

Une solution similaire est trouvée pour σ_{yy}^p . Cette expression comporte le décalage Φ_m qui est déterminé dans les paragraphes suivants. Afin de déterminer ce décalage, l'Equation (4.35) est identifiée à l'Equation (4.24) sur les frontières Γ_2 et Γ_4 .

4.3.4 Solution sur les frontières

Afin de déterminer Φ_m , les conditions aux limites pour Γ_2 et Γ_4 données dans l'Equation (4.24) sont utilisées. Une telle solution n'est cependant pas compatible avec la solution générale de l'Equation (4.20) proposée dans le paragraphe précédent et qui est composée d'une série de fonctions. L'idée est donc d'exprimer la solution de l'Equation (4.24) avec une série de Fourier. $\sigma_{xx}^\Gamma(x)$ est développé sous la forme suivante :

$$\sigma_{xx}^\Gamma(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma_m \sin\left(\frac{m\pi x}{l_x}\right) \quad (4.36)$$

où les coefficients Γ_m sont à déterminer. Cette expression est d'abord intégrée dans l'équation différentielle (4.21) :

$$-\left(\frac{m\pi}{l_x}\right)^2 \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma_m \sin\left(\frac{m\pi x}{l_x}\right) - A \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma_m \sin\left(\frac{m\pi x}{l_x}\right) = C \quad (4.37)$$

Cette équation est alors multipliée par $\sin\left(\frac{n\pi x}{l_x}\right)$ et intégrée de 0 à l_x afin de trouver Γ_m qui s'écrit :

$$\Gamma_m = \frac{2C[(-1)^m - 1]}{m\pi\left[\left(\frac{m\pi}{l_x}\right)^2 + A\right]} \quad (4.38)$$

Γ_m peut aussi s'écrire :

$$\begin{cases} \Gamma_m = \frac{-4C}{m\pi[(\frac{m\pi}{l_x})^2 + A]} & \text{pour } m \text{ impair} \\ \Gamma_m = 0 & \text{pour } m \text{ pair} \end{cases} \quad (4.39)$$

La solution le long de la frontière Γ_2 et Γ_4 s'écrit donc finalement :

$$\sigma_{xx}^\Gamma(x) = \sigma_{xx}(x, 0) = \sigma_{xx}(x, l_y) = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{-4C}{m\pi[(\frac{m\pi}{l_x})^2 + A]} \sin(\frac{m\pi x}{l_x}) \quad (4.40)$$

Il est facile de démontrer que cette solution converge rapidement vers la solution usuelle de l'Equation (4.3.3). Cette convergence rapide de cette série est due au cube de m dans le dénominateur des coefficients de cette série.

4.3.5 Détermination de Φ_m

4.3.5.1 Conditions aux limites

Le but ici est de déterminer Φ_m . Ce décalage d'origine peut être calculé en utilisant les conditions aux limites le long de Γ_2 et Γ_4 définies par l'Equation (4.40) qui sont cette fois compatibles :

$$\sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} F_{mn} \sin(\frac{m\pi x}{l_x}) \sin(\frac{n\pi\Phi_m}{(2\Phi_m + l_y)}) = \sum_{p=1,3,5,\dots}^{\infty} \Gamma_p \sin(\frac{p\pi x}{l_x}) \quad (4.41)$$

La propriété d'orthogonalité de l'Equation (4.27) est utilisée pour la première somme, ce qui conduit à :

$$\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} F_{mn} \sin(\frac{n\pi\Phi_m}{(2\Phi_m + l_y)}) = \Gamma_m \quad (4.42)$$

qui se réécrit d'après la définition de F_{mn} donnée par l'Equation (4.34) :

$$\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4H(2\Phi_m + l_y)^2}{(n\pi)^3 \left[\left(\frac{m\pi}{l_x} \right)^2 + A \right] + n\pi \left[E \left(\frac{m\pi}{l_x} \right)^2 + G \right] (2\Phi_m + l_y)^2} \sin\left(\frac{n\pi\Phi_m}{(2\Phi_m + l_y)}\right) = \frac{C}{\left[\left(\frac{m\pi}{l_x} \right)^2 + A \right]} \quad (4.43)$$

Des coefficients a , b et c sont introduits afin de simplifier les expressions, ce qui donne :

$$S1(a, b, c) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{a}{n^3 + bn} \sin(n\pi c) = \frac{C}{\left[\left(\frac{m\pi}{l_x} \right)^2 + A \right]} \quad (4.44)$$

avec :

$$\begin{cases} a = 4H \left[\frac{(2\Phi_m + l_y)^2}{\left[\left(\frac{m\pi}{l_x} \right)^2 + A \right] \pi^3} \right] \\ b = \frac{E \left(\frac{m\pi}{l_x} \right)^2 + G}{\left[\left(\frac{m\pi}{l_x} \right)^2 + A \right] \pi^2} (2\Phi_m + l_y)^2 \\ c = \frac{\Phi_m}{(2\Phi_m + l_y)} \end{cases} \quad (4.45)$$

4.3.5.2 Calcul de $S1(a, b, c)$

Seuls les indices impairs interviennent dans la somme de l'Equation (4.44). Pour calculer cette somme, il s'avère d'abord judicieux de distinguer les indices pairs et impairs. Pour cela, la notation suivante est utilisée :

$$\begin{cases} S(a, b, c) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n^3 + bn} \sin(n\pi c) \\ S1(a, b, c) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{a}{n^3 + bn} \sin(n\pi c) \text{ (à déterminer)} \\ S2(a, b, c) = \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{a}{n^3 + bn} \sin(n\pi c) \end{cases} \quad (4.46)$$

Une relation entre $S(a, b, c)$ et $S2(a, b, c)$ peut être facilement trouvée :

$$S2(a, b, c) = \frac{1}{8} S\left(a, \frac{b}{4}, 2c\right) \quad (4.47)$$

Cette relation permet de déduire $S1(a, b, c)$ qui s'écrit :

$$S1(a, b, c) = S(a, b, c) - \frac{1}{8}S(a, \frac{b}{4}, 2c) \quad (4.48)$$

La dernière équation montre que $S1(a, b, c)$ dépend directement de $S(a, b, c)$. De ce fait, le calcul de $S(a, b, c)$ doit être effectué. $S(a, b, c)$ peut être décomposée en deux parties :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n^3 + bn} \sin(n\pi c) = \frac{a}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{n}{n^2 + b} \right) \sin(n\pi c) \quad (4.49)$$

Ce qui permet de réécrire $S(a, b, c)$ sous la forme :

$$S(a, b, c) = \frac{a}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{n}{n^2 + b} \right) \sin(n\pi c) \quad (4.50)$$

La somme $S(a, b, c)$ est ainsi décomposée en deux parties qui sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\pi c) \\ -\frac{a}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + b} \sin(n\pi c) \end{array} \right. \quad (4.51)$$

Ces deux parties sont calculées dans les paragraphes suivants.

4.3.5.3 Calcul de $S(a, b, c)$

Commençons le calcul de la première somme qui est égale à :

$$\frac{a}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\pi c) \quad (4.52)$$

Cette série correspond en fait à un développement en série de Fourier de la fonction suivante (voir annexe 1.1) :

$$\frac{a}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\pi c) = \frac{a\pi}{2b} (1 - c) \quad (4.53)$$

La deuxième somme est maintenant calculée. Cette somme est égale à :

$$-\frac{a}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + b} \sin(n\pi c) \quad (4.54)$$

Cette série correspond à un développement en série de Fourier de la fonction suivante (voir annexe 1.2) :

$$-\frac{a}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + b} \sin(n\pi c) = -\frac{a}{b} \frac{\pi}{2 \sinh(\pi\sqrt{b})} \sinh(\pi\sqrt{b}(1-c)) \quad (4.55)$$

De ce fait, $S(a, b, c)$ vaut :

$$S(a, b, c) = \frac{a\pi}{2b}(1-c) - \frac{a}{b} \frac{\pi}{2 \sinh(\pi\sqrt{b})} \sinh(\pi\sqrt{b}(1-c)) \quad (4.56)$$

4.3.5.4 Calcul de $S1(a, b, c)$

$S1(a, b, c)$ est maintenant calculée à partir de $S(a, b, c)$ grâce à l'Equation (4.48) :

$$S1(a, b, c) = \frac{4H}{(E(\frac{m\pi}{l_x})^2 + G)} \left[\frac{1}{4} - \frac{\sinh(\sqrt{d}(\Phi_m + l_y))}{2 \sinh(\sqrt{d}(2\Phi_m + l_y))} + \frac{\sinh(\frac{\sqrt{d}l_y}{2})}{4 \sinh(\frac{(2\Phi_m + l_y)\sqrt{d}}{2})} \right] \quad (4.57)$$

avec :

$$d = \frac{E(\frac{m\pi}{l_x})^2 + G}{[(\frac{m\pi}{l_x})^2 + A]} \quad (4.58)$$

4.3.5.5 Conclusion : expression de Φ_m

Au bilan, en reprenant l'Equation (4.44), une équation à une inconnue, Φ_m , est obtenue :

$$\frac{4H}{(E(\frac{m\pi}{l_x})^2 + G)} \left[\frac{1}{4} - \frac{\sinh(\sqrt{d}(\Phi_m + l_y))}{2 \sinh(\sqrt{d}(2\Phi_m + l_y))} + \frac{\sinh(\frac{\sqrt{d}l_y}{2})}{4 \sinh(\frac{(2\Phi_m + l_y)\sqrt{d}}{2})} \right] = \frac{C}{[(\frac{m\pi}{l_x})^2 + A]} \quad (4.59)$$

Cette équation est non linéaire. Cependant, elle peut être simplifiée en regardant l'ordre de grandeur de certaines constantes. Avec des valeurs usuelles d'épaisseurs de patch e_p et de colle e_a , c'est à dire 1.10^{-3}m , l'ordre de grandeur de d est de l'ordre de 1.10^6m^2 (dans les exemples du chapitre suivant, d est compris entre 2.10^6m^2 et 3.10^6m^2). De ce fait, l'Equation précédente devient alors :

$$\frac{4H}{(E(\frac{m\pi}{l_x})^2 + G)} \left[\frac{1}{4} - \frac{e^{\sqrt{d}(\Phi_m + l_y)}}{2e^{\sqrt{d}(2\Phi_m + l_y)}} + \frac{e^{\frac{\sqrt{d}l_y}{2}}}{4e^{\frac{(2\Phi_m + l_y)\sqrt{d}}{2}}} \right] = \frac{C}{[(\frac{m\pi}{l_x})^2 + A]} \quad (4.60)$$

soit :

$$\frac{H}{(E(\frac{m\pi}{l_x})^2 + G)} [1 - e^{-\sqrt{d}\Phi_m}] = \frac{C}{[(\frac{m\pi}{l_x})^2 + A]} \quad (4.61)$$

La résolution de cette équation permet de calculer Φ_m :

$$\Phi_m = -\frac{1}{\sqrt{d}} \ln(1 - \frac{Cd}{H}) \quad (4.62)$$

Cette solution de Φ_m n'est valable que si la condition suivante est vérifiée :

$$\frac{Cd}{H} < 1 \quad (4.63)$$

pour avoir un argument du logarithme positif. Dans le cas contraire, la solution Φ_m ne peut pas être calculée directement. Dans le cas où $\frac{Cd}{H} \geq 1$, une combinaison de solutions, où $\frac{Cd}{H} < 1$ pour chaque solution, est utilisée. En pratique, la différence de deux essais de traction biaxiale est utilisée. Des exemples ci-après illustrent ces propos.

4.3.6 Conclusion

Les calculs menés aboutissent à une solution analytique qui permet d'évaluer les distributions bidimensionnelles dans le patch composite grâce à l'Equation (4.35). Cette solution contient un décalage Φ_m , déterminé par l'Equation (4.62), qui doit quant à lui satisfaire la condition (4.63).

4.4 Essai de cisaillement

4.4.1 Equations d'équilibre

Le système d'équations (4.2) est maintenant résolu dans le cas d'un essai de cisaillement plan. Les contraintes σ_{xx}^p et σ_{yy}^p dans le composite sont négligées. Grâce à cette hypothèse, le système d'équations (4.2) se simplifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{xy}^p}{\partial y} = \frac{\sigma_{xz}^a}{e_p} \\ \frac{\partial \sigma_{xy}^p}{\partial x} = \frac{\sigma_{yz}^a}{e_p} \end{array} \right. \quad (4.64)$$

Les même équations sont valables si un élément du substrat est isolé. Le système d'équations suivant est alors obtenu. Suivant la direction x :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{xy}^p}{\partial y} = \frac{\sigma_{xz}^a}{e_p} \\ \frac{\partial \sigma_{xy}^s}{\partial y} = -\frac{\sigma_{xz}^a}{e_s} \end{array} \right. \quad (4.65)$$

Suivant la direction y :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{xy}^p}{\partial x} = \frac{\sigma_{yz}^a}{e_p} \\ \frac{\partial \sigma_{xy}^s}{\partial x} = -\frac{\sigma_{yz}^a}{e_s} \end{array} \right. \quad (4.66)$$

Du fait des bords libres du patch composite, les conditions aux limites suivantes, pour $x = 0$, $x = l_x$ et pour $y = 0$, $y = l_y$, sont introduites sur les quatres bords libres :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xy}^s = \sigma_{xy}^\infty \\ \sigma_{xy}^p = 0 \end{array} \right. \quad (4.67)$$

Les équations précédentes sont développées suivant la direction x . L'égalité suivante est obtenue à partir de l'Equation (4.65) :

$$e_p \frac{\partial \sigma_{xy}^p}{\partial y} = -e_s \frac{\partial \sigma_{xy}^s}{\partial y} \quad (4.68)$$

soit :

$$\frac{\partial}{\partial y} (e_p \sigma_{xy}^p + e_s \sigma_{xy}^s) = 0 \quad (4.69)$$

Cette dernière équation est intégrée, ce qui donne :

$$e_p \sigma_{xy}^p + e_s \sigma_{xy}^s = f(x) \quad (4.70)$$

Puisque les calculs menés dans la direction y conduisent à un résultat similaire, $f(x) = cste$. Cette constante est définie grâce aux conditions aux limites (Equation (4.67)) :

$$e_p \sigma_{xy}^p + e_s \sigma_{xy}^s = e_s \sigma_{xy}^\infty \quad (4.71)$$

Une expression analogue peut être trouvée suivant la direction y . Les contraintes dans le patch suivant la direction x et y sont maintenant exprimées en fonction des déplacements u_p et v_p du patch composite et des déplacements u_s et v_s du substrat à partir de l'Equation (4.10) :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xy}^p}{\partial x} = \frac{(v_p - v_s)}{e_a e_p} G_a \\ \frac{\partial \sigma_{xy}^p}{\partial y} = \frac{(u_p - u_s)}{e_a e_p} G_a \end{cases} \quad (4.72)$$

Ces deux équations sont respectivement dérivées par rapport à x et à y :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \sigma_{xy}^p}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{(v_p - v_s)}{e_a e_p} G_a \right] \\ \frac{\partial^2 \sigma_{xy}^p}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{(u_p - u_s)}{e_a e_p} G_a \right] \end{cases} \quad (4.73)$$

puis ajoutées, ce qui donne :

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xy}^p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xy}^p}{\partial y^2} = \sigma_{xy}^p \frac{G_a}{G_p e_a e_p} - \sigma_{xy}^s \frac{G_a}{G_s e_a e_p} \quad (4.74)$$

L'Equation (4.71) est introduite dans cette dernière équation qui devient :

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xy}^p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xy}^p}{\partial y^2} - \gamma^2 \sigma_{xy}^p = -\alpha^2 \sigma_{xy}^\infty \quad (4.75)$$

avec :

$$\begin{cases} \gamma^2 = \frac{G_a}{e_a} \left(\frac{1}{G_p e_p} + \frac{1}{G_s e_s} \right) \\ \alpha^2 = \frac{G_a}{e_a e_p G_s} \end{cases} \quad (4.76)$$

Cette équation différentielle représente le comportement d'une structure renforcée par un patch composite orthotrope soumise à un essai de cisaillement. Il est facile de vérifier que cette équation n'a pas de solution analytique classique. De ce fait, elle est résolue en utilisant des séries de Fourier dans le paragraphe suivant.

4.4.2 Résolution par une double série de Fourier

Afin d'approcher la solution de l'Equation (4.75), une double série de Fourier est utilisée. Elle s'écrit sous la forme :

$$\sigma_{xy}^p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} H_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{l_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{l_y}\right) \quad (4.77)$$

Cette double série de Fourier est substituée à σ_{xy}^p dans l'équation différentielle (4.75) et la propriété d'orthogonalité de la fonction sinus (Equation (4.27)) est utilisée :

$$\begin{aligned} \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} F_{mn} \left[\left(\frac{m\pi}{l_x} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{l_y} \right)^2 + \gamma^2 \right] \sin^2\left(\frac{m\pi x}{l_x}\right) \sin^2\left(\frac{n\pi y}{l_y}\right) dx dy \\ = \alpha^2 \sigma_{xy}^\infty \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \sin\left(\frac{m\pi x}{l_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{l_y}\right) dx dy \end{aligned} \quad (4.78)$$

soit :

$$H_{mn}[(\frac{m\pi}{l_x})^2 + (\frac{n\pi}{l_y})^2 + \gamma^2](\frac{l_x l_y}{4}) = \alpha^2 \sigma_{xy}^\infty \frac{l_x l_y}{mn\pi^2} [\cos(m\pi) - 1][\cos(n\pi) - 1] \quad (4.79)$$

Les coefficients H_{mn} de la double série de Fourier sont calculés à partir de cette dernière équation :

$$H_{mn} = \frac{4\alpha^2 \sigma_{xy}^\infty [\cos(m\pi) - 1][\cos(n\pi) - 1]}{mn\pi^2 [(\frac{m\pi}{l_x})^2 + (\frac{n\pi}{l_y})^2 + \gamma^2]} \quad (4.80)$$

soit :

$$\begin{cases} H_{mn} = \frac{16\alpha^2 \sigma_{xy}^\infty}{mn\pi^2 [(\frac{m\pi}{l_x})^2 + (\frac{n\pi}{l_y})^2 + \gamma^2]} \text{ pour } m \text{ et } n \text{ impairs} \\ H_{mn} = 0 \text{ pour } m \text{ pair ou } n \text{ pair} \end{cases} \quad (4.81)$$

L'expression complète de la contrainte de cisaillement dans le composite s'écrit donc :

$$\sigma_{xy}^p(x, y) = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{16\alpha^2 \sigma_{xy}^\infty}{mn\pi^2 [(\frac{m\pi}{l_x})^2 + (\frac{n\pi}{l_y})^2 + \gamma^2]} \sin(\frac{m\pi x}{l_x}) \sin(\frac{n\pi y}{l_y}) \quad (4.82)$$

Les équations d'équilibre (4.64) et (4.65) sont utilisées afin d'exprimer les contraintes de cisaillement dans la colle à partir des contraintes de cisaillement dans le patch composite :

$$\begin{cases} \sigma_{xz}^a = e_p \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{16\alpha^2 \sigma_{xy}^\infty}{l_y m \pi [(\frac{m\pi}{l_x})^2 + (\frac{n\pi}{l_y})^2 + \gamma^2]} \sin(\frac{m\pi x}{l_x}) \cos(\frac{n\pi y}{l_y}) \\ \sigma_{yz}^a = e_p \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{16\alpha^2 \sigma_{xy}^\infty}{l_x n \pi [(\frac{m\pi}{l_x})^2 + (\frac{n\pi}{l_y})^2 + \gamma^2]} \cos(\frac{m\pi x}{l_x}) \sin(\frac{n\pi y}{l_y}) \end{cases} \quad (4.83)$$

4.5 Conclusion de l'approche analytique

A ce stade, des solutions analytiques sont proposées afin d'estimer, moyennant certaines hypothèses simplificatrices, les distributions de contraintes dans un patch rectangulaire et dans la colle dans deux cas : traction biaxiale et cisaillement plan. Pour valider ces calculs, les résultats fournis par les expressions analytiques sont comparés avec ceux donnés par une solution numérique de type différences finies. Ce même programme de résolution par différences finies, présenté ci-dessous, sera ensuite utilisé dans des cas de géométries de patches quelconques.

4.6 Approche par différences finies

4.6.1 Introduction

Le but de ce paragraphe est de proposer une approche numérique par différences finies afin de valider l'approche théorique et d'étudier l'influence de la topologie du patch composite sur la valeur maximale du cisaillement dans la colle. En effet, les développements précédents ne concernent que le cas très particulier d'un patch rectangulaire. Il semble illusoire de rechercher une solution analytique pour des géométries plus complexes, d'où la nécessité de proposer un outil numérique de résolution certes approchée, mais qui est de fait plus général. Une approche de type différences finies a été préférée aux éléments finis car cette dernière ne permet pas de prendre en compte proprement la condition de cisaillement nul au bord libre, sauf au prix d'un maillage très fin. En revanche, cette condition peut être introduite explicitement avec un programme de calcul par différences finies. Elle est alors vérifiée automatiquement par les résultats obtenus dans ce cas. Ce programme par différences finies peut être utilisé en complément d'un calcul par éléments finis afin de calculer plus précisément les contraintes dans la colle. Dans ce cas, un calcul préliminaire par éléments finis est cependant nécessaire pour obtenir les conditions aux limites en contraintes dans le substrat, comme on le verra au paragraphe suivant.

4.6.2 Schéma de calcul

Un schéma de différences finies centrées en deux dimensions est utilisé afin de résoudre les équations aux dérivées partielles (4.14) (4.15) dans le cas d'un essai de traction et (4.75) dans le cas d'un essai de cisaillement. Les équations aux dérivées partielles sont discrétisées en un système d'équations à l'aide des différences finies. Les dérivées partielles du second ordre sont approchées de la manière suivante :

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xx}^p}{\partial x^2} = \frac{\sigma_{xx}^p(x + \Delta x, y) - 2\sigma_{xx}^p(x, y) + \sigma_{xx}^p(x - \Delta x, y)}{(\Delta x)^2} \quad (4.84)$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{yy}^p}{\partial y^2} = \frac{\sigma_{yy}^p(x, y + \Delta y) - 2\sigma_{yy}^p(x, y) + \sigma_{yy}^p(x, y - \Delta y)}{(\Delta y)^2} \quad (4.85)$$

Le domaine est discrétisé de manière uniforme afin d'avoir $\Delta x = \Delta y = \text{constante}$. En posant $\sigma_{xx}^p(i, j) = \sigma_{xx}^p(x, y)$ et $\sigma_{yy}^p(i, j) = \sigma_{yy}^p(x, y)$ en $x = i\Delta x$ et $y = j\Delta y$, le système (4.17) devient :

$$\frac{\sigma_{xx}^p(i+1, j) - 2\sigma_{xx}^p(i, j) + \sigma_{xx}^p(i-1, j)}{(\Delta x)^2} = A\sigma_{xx}^p(i, j) + B\sigma_{yy}^p(i, j) + C_{i,j} \quad (4.86)$$

$$\frac{\sigma_{yy}^p(i, j+1) - 2\sigma_{yy}^p(i, j) + \sigma_{yy}^p(i, j-1)}{(\Delta y)^2} = D\sigma_{xx}^p(i, j) + E\sigma_{yy}^p(i, j) + F_{i,j} \quad (4.87)$$

$C_{i,j}$ et $F_{i,j}$ dépendent du point considéré car ces valeurs intègrent les conditions aux limites en contraintes, comme le montrent les Equations (4.17) et (4.18). Ces deux dernières équations écrites en tout point forment le système linéaire suivant :

$$\lambda \mathbf{M} = \kappa \quad (4.88)$$

Les composantes de λ s'écrivent :

$$\lambda_{i,(i-1)n+j} = -A - \frac{2}{(\Delta x)^2} \quad (4.89)$$

$$\lambda_{i,(i-2)n+j} = \frac{1}{(\Delta x)^2} \quad (4.90)$$

$$\lambda_{i,in+j} = \frac{1}{(\Delta x)^2} \quad (4.91)$$

$$\lambda_{i,(i-1)n+j+mn} = -B \quad (4.92)$$

$$\lambda_{i+mn,(i-1)n+j+mn} = -E - \frac{2}{(\Delta y)^2} \quad (4.93)$$

$$\lambda_{i+mn,(i-2)n+j+mn} = \frac{1}{(\Delta y)^2} \quad (4.94)$$

$$\lambda_{i+mn,in+j+mn} = \frac{1}{(\Delta y)^2} \quad (4.95)$$

$$\lambda_{i+mn,(i-1)n+j} = -D \quad (4.96)$$

Les composantes de M s'écrivent :

$$M_{(i-1)n+j,1} = \sigma_{xx}^p(i, j) \quad (4.97)$$

$$M_{(i-1)n+j+mn,1} = \sigma_{yy}^p(i, j) \quad (4.98)$$

Les composantes de κ s'écrivent :

$$\kappa_{(i-1)n+j,1} = C_{i,j} \quad (4.99)$$

$$\kappa_{(i-1)n+j+mn,1} = F_{i,j} \quad (4.100)$$

avec :

$$1 \leq i \leq m \quad 1 \leq j \leq n \quad (4.101)$$

Les conditions aux limites imposées aux bords libres sont les suivantes :

$$\vec{T}(Q, \vec{n}) = \vec{0} \quad (4.102)$$

$\vec{T}(Q, \vec{n})$ est le vecteur contrainte au point Q , avec Q un point quelconque de la frontière libre et \vec{n} le vecteur normal à cette frontière. Il est à noter que dans l'Equation (4.88), les inconnues sont le vecteur M contenant les contraintes dans le patch et les coefficients $C_{i,j}$ et $F_{i,j}$. Ces coefficients sont déterminés dès que sont connues les contraintes $\sigma_{xx}^\infty(i, j)$ et $\sigma_{yy}^\infty(i, j)$. Ces contraintes sont égales à une constante dans le cas simple d'un essai de traction modélisé, avec une contrainte constante sur le long des frontières où l'effort est appliqué. Ces contraintes varient toutefois pour des cas de chargements plus compliqués. De ce fait, ce programme, implanté sous Matlab, a été couplé au code d'éléments finis Ansys afin de déterminer ces conditions aux limites en contraintes dans le substrat dans des cas quelconques.

Un calcul par éléments finis est d'abord effectué afin de récupérer les contraintes dans le composite et dans le substrat. Un modèle bidimensionnel est utilisé avec des éléments de coque à 8 noeuds. Un maillage régulier est utilisé, entraînant une discrétisation de la structure et du renfort. Cette discrétisation est aussi exportée d'Ansys à Matlab. Ce calcul effectué, les contraintes en chaque noeud sont extraites puis réintroduites dans le programme par différences finies via l'équation suivante afin de trouver $\sigma_{xx}^\infty(i, j)$ et $\sigma_{yy}^\infty(i, j)$:

$$\begin{cases} e_p \sigma_{xx}^p(i, j) + e_s \sigma_{xx}^s(i, j) = e_s \sigma_{xx}^\infty(i, j) \\ e_p \sigma_{yy}^p(i, j) + e_s \sigma_{yy}^s(i, j) = e_s \sigma_{yy}^\infty(i, j) \end{cases} \quad (4.103)$$

Les contraintes $\sigma_{xx}^\infty(i, j)$ et $\sigma_{yy}^\infty(i, j)$ permettent de calculer les coefficients $C_{i,j}$ et $F_{i,j}$ des Equations (4.86) et (4.87). Le système (4.88) comporte de ce fait autant d'inconnues que d'équations et peut donc être résolu. En dérivant numériquement $\sigma_{xx}^p(i, j)$, la distribution de la contrainte de cisaillement $\sigma_{xz}^a(i, j)$ dans la colle est calculée grâce à l'Equation (4.104) :

$$\begin{cases} \sigma_{xz}^a(i, j) = e_p \frac{\Delta \sigma_{xx}^p(i, j)}{\Delta x} \\ \sigma_{yz}^a(i, j) = e_p \frac{\Delta \sigma_{yy}^p(i, j)}{\Delta y} \end{cases} \quad (4.104)$$

4.6.3 Conclusion

Un programme de calcul par différences finies a été développé afin de déterminer les distributions des contraintes dans le composite et dans la colle dans le cas de patches de formes quelconques. Cette approche est couplée avec un code d'éléments finis afin de calculer précisément les conditions aux limites en contraintes à appliquer au programme de calcul par différences finies.

4.7 Conclusion de l'étude

Des modèles bidimensionnels ont été développés dans ce chapitre afin de permettre :

- de mieux comprendre les mécanismes du transfert d'effort dans le cas de plaques renforcées. Pour cela, un modèle bidimensionnel analytique a été développé dans le cas de patches rectangulaires. Ce modèle prend en compte les coefficients de Poisson des différents matériaux ;
- de calculer le transfert d'effort dans le cas de patches de formes quelconques.

Dans ce but, un programme de calcul par différences finies a été développé.

La Figure 4.4 représente le résumé et les principales notions abordées de ce chapitre. L'objectif du chapitre suivant est d'utiliser ces outils analytiques et numériques afin d'étudier la distribution du cisaillement dans les joints collés pour des cas bidimensionnels.

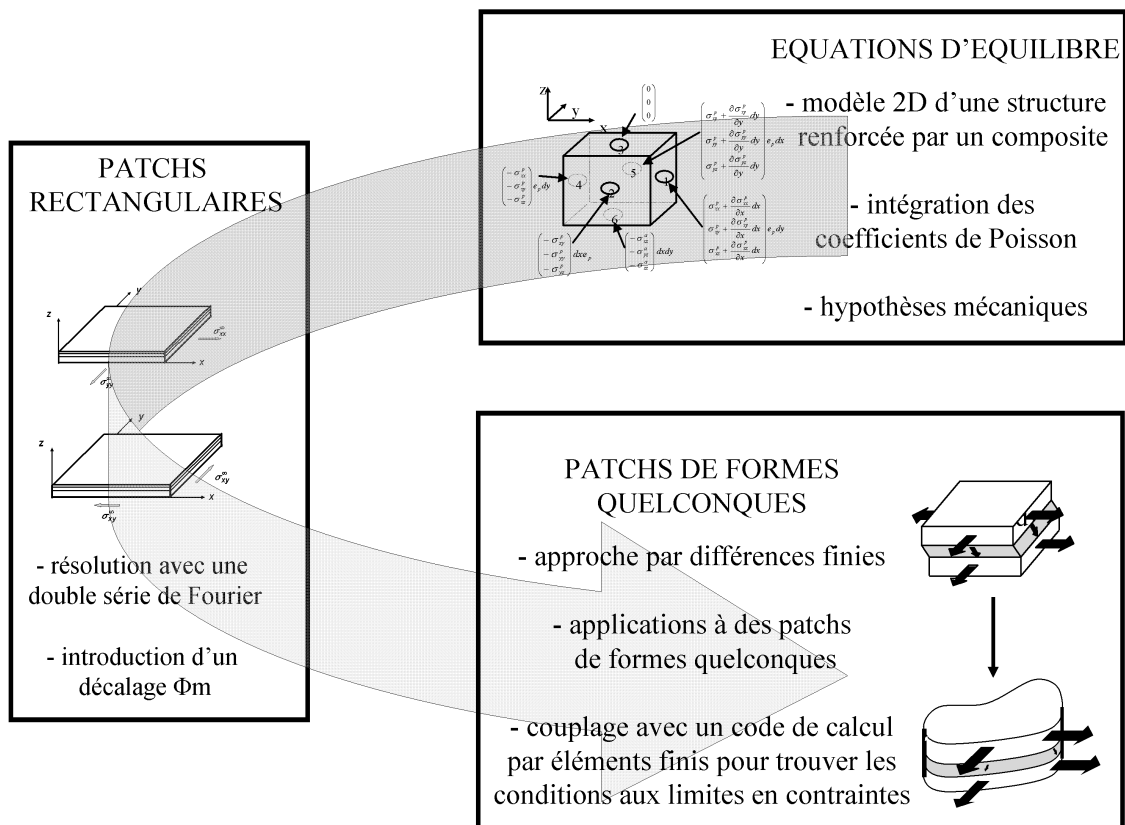


FIG. 4.4 – Résumé du chapitre 4.

Chapitre 5

Applications des modèles bidimensionnels

5.1 Introduction

Les outils théoriques précédemment développés sont appliqués à un problème de plaque renforcée. Le substrat est en aluminium de comportement linéaire isotrope ($E = 72$ GPa, $\nu = 0.32$). Son épaisseur e_s est égale à 1 mm. La colle utilisée est de comportement linéaire isotrope ($E = 4,2$ GPa, $\nu = 0,3$). Son épaisseur e_a est égale à 0,15 mm. Enfin, le patch composite unidirectionnel utilisé est composé d'une matrice époxyde et de fibres de carbone, de comportement linéaire orthotrope ($E_x = 181$ GPa, $E_y = 10$ GPa, $\nu_{xy}=0.28$ et $G_{xy} = 7$ GPa). Son épaisseur totale e_p est égale à 0,5 mm. Les longueurs de transfert longitudinale L_{tx} et transversale L_{ty} peuvent être calculées à partir de l'Equation 4.25. Elles valent respectivement 5,6 mm et 1,9 mm. Une analyse des résistances de chacun des matériaux est réalisée afin de déterminer lequel cédera en premier. Les résistances de chaque matériau sont données Tableau 1.2. Ce sont des valeurs estimées issues de la littérature [13]. Deux types de critère de rupture sont utilisés par la suite : le critère de Tsai-Wu pour le matériau composite (voir Equation (1.10)) et le critère de Von Mises pour l'aluminium et pour la colle (voir Equation (1.11)).

Trois cas sont étudiés ci-après. Dans un premier temps, l'étude est menée sur un essai de traction biaxiale. Une comparaison entre l'approche théorique et l'approche numérique est effectuée pour ce premier cas. Deux autres cas sont ensuite traités : la structure renforcée est soumise à deux essais de traction uniaxiale lorsque les fibres sont orientées parallèlement et perpendiculairement à l'axe de traction. Dans les trois cas, σ_{xx}^p , σ_{yy}^p , σ_{xz}^a , et σ_{yx}^a sont calculées à partir de l'expression générale de σ_{xx}^p donnée par l'Equation (4.26), de l'expression des coefficients F_{mn} (Equation (4.34)) et de l'expression des décalages d'origine Φ_m (Equation (4.62)). Les patches de formes

quelconques sont examinés à la fin du chapitre.

5.2 Traction biaxiale : comparaison de l'approche numérique et de l'approche analytique

5.2.1 Comparaison approche théorique - approche numérique

Un essai de traction biaxiale est réalisé afin de pouvoir comparer les deux méthodes de calcul et ainsi valider l'approche analytique. Le calcul est mené avec 31 termes dans la série de l'Equation (4.26) exprimant σ_{xx}^p . Le substrat est soumis dans ce cas à une contrainte longitudinale $\sigma_{xx}^\infty = 150$ MPa et à une contrainte transversale $\sigma_{yy}^\infty = 300$ MPa (voir Figure 5.1).

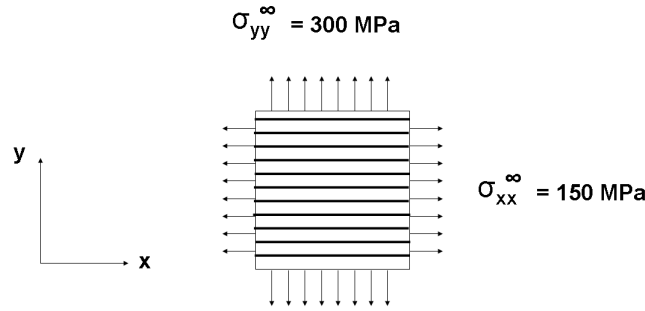
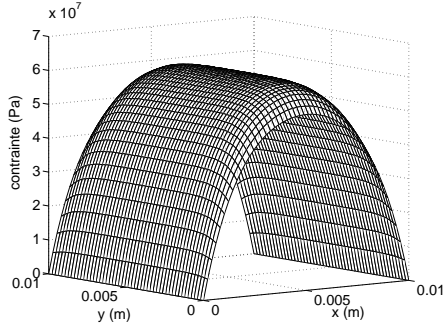


FIG. 5.1 – Essai de traction biaxiale.

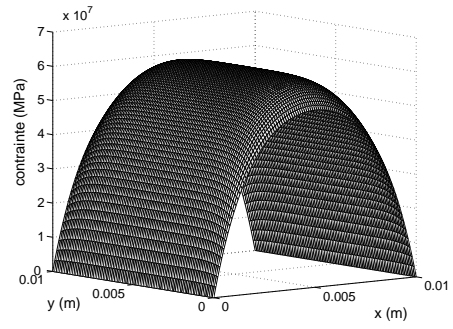
Les fibres du renfort sont orientées suivant la direction x . La Figure 5.2 représente les distributions σ_{xx}^p et σ_{yy}^p dans le patch composite ainsi que σ_{xz}^a et σ_{yx}^a dans la colle. Les distributions numériques et théoriques des contraintes dans le renfort et dans la colle sont identiques. Il subsiste cependant une légère différence dans la distribution des contraintes de cisaillement, aux niveau des bords libres. En effet, la valeur du pic de cisaillement calculée numériquement est légèrement inférieure à celle qui est calculée analytiquement. Cependant, un raffinement du maillage permet de converger vers la valeur calculée analytiquement. De plus, ce pic est exactement au bord libre dans le premier cas et légèrement décalé dans le second cas.

5.2.2 Analyse des distributions de contraintes

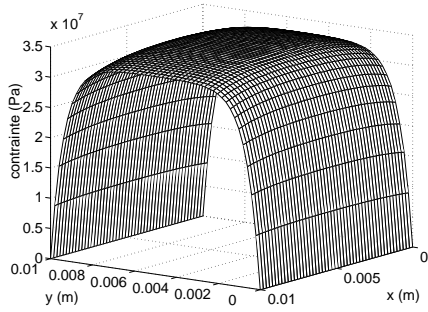
Les contraintes dans le patch composite ont une distribution bidimensionnelle, avec un comportement bidimensionnel plus marqué pour la contrainte longitudinale



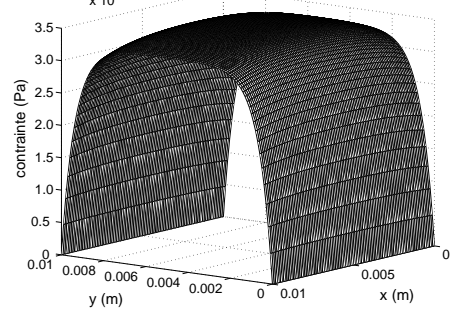
a - σ_{xx}^p théorique



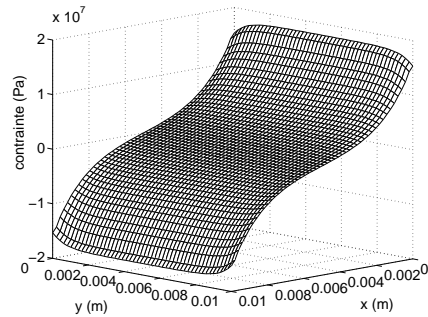
b - σ_{xx}^p numérique



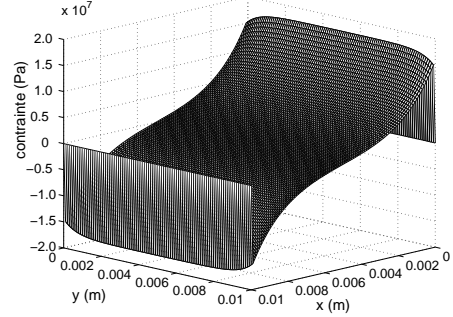
c - σ_{yy}^p théorique



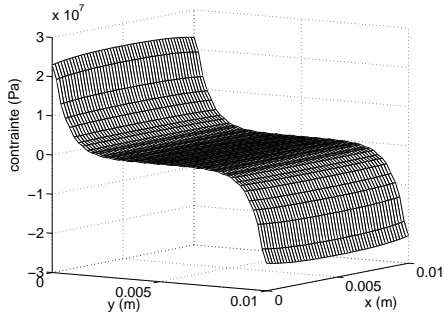
d - σ_{yy}^p numérique



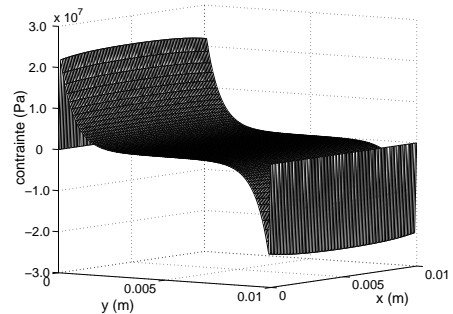
e - σ_{xz}^a théorique



f - σ_{xz}^a numérique



g - σ_{yz}^a théorique



h - σ_{yz}^a numérique

FIG. 5.2 – Distributions des contraintes dans le cas d'un essai de traction biaxiale : comparaison entre l'approche théorique et l'approche numérique.

σ_{xx}^p . Les contraintes σ_{xx}^p et σ_{yy}^p sont plus importantes au milieu du patch composite, que ce soit suivant x ou suivant y . Ceci peut s'expliquer par la différence des coefficients de Poisson entre le patch composite et le substrat. En effet, le coefficient de Poisson du substrat (0,32) est plus important que les coefficients de Poisson majeur et mineur (0,28 et 0,02) du matériau composite. Ceci a pour conséquence d'obtenir un déplacement plus important dans le substrat que dans le composite. Ce déplacement entraîne de ce fait une contrainte de compression suivant x et y dans le matériau composite. De plus, ce déplacement est plus important aux bords libres, provoquant ainsi une contrainte de compression plus importante à cet endroit. Cette contrainte de compression se traduit par des contraintes globales σ_{xx}^p et σ_{yy}^p moins importantes aux bords libres. Ce phénomène est plus accentué sur la distribution de la contrainte longitudinale σ_{xx}^p du composite que sur la distribution de la contrainte transversale σ_{yy}^p . Ceci s'explique par le fait que la contrainte transversale σ_{yy}^∞ appliquée au substrat est deux fois plus importante que la contrainte longitudinale σ_{xx}^∞ et que le coefficient de Poisson mineur est 18 fois moins important que le coefficient majeur. Ce phénomène bidimensionnel influe sur la distribution des contraintes de cisaillement dans la colle. La contrainte de cisaillement est en effet plus importante sur les bords libres, comme prévu par une analyse unidirectionnelle classique, mais le maximum se situe au milieu du bord libre dans cet essai de traction biaxiale. Dans le cas général, il est à noter qu'une analyse unidirectionnelle classique ne tient pas compte des couplages entre les deux directions du problème et ne permet pas de calculer rigoureusement ces distributions de contraintes, que ce soit dans le composite ou dans la colle. Ces résultats valident à nos yeux l'approche analytique proposée dans les paragraphes précédents.

Le Tableau 5.1 représente les contraintes maximales de chaque matériau calculées dans cet exemple ainsi que les valeurs de critère de rupture de chaque matériau ramenées en pourcentage pour pouvoir comparer les défaillances.

| | Composite | Aluminium | Colle |
|---------------------------------------|-------------|-----------|-------|
| Contrainte suivant x maximale (MPa) | 61 | 120 | 18 |
| Contrainte suivant y maximale (MPa) | 35 | 283 | 24 |
| Critère de rupture (%) | 76,7 | 31,3 | 56,7 |

TAB. 5.1 – Contraintes maximales dans le cas d'un essai de traction biaxiale.

L'analyse est conduite suivant les deux directions. Le matériau composite possède le plus grand rapport de défaillance et sera donc vraisemblablement la cause de défaillance du renforcement. En effet, la résistance suivant y du patch composite est très faible, et la contrainte transversale σ_{yy}^∞ appliquée au substrat est deux fois plus

importante que celle appliquée suivant x .

5.3 Traction uniaxiale sur un patch à 0 degré

Le substrat est soumis à une contrainte longitudinale $\sigma_{xx}^\infty = 150$ MPa (voir Figure 5.3).

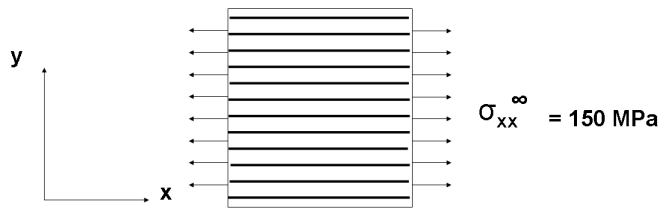


FIG. 5.3 – Essai de traction uniaxiale à 0 degré.

La Figure 5.4 représente les distributions de σ_{xx}^p , σ_{yy}^p dans le patch composite et de σ_{xz}^a , σ_{yx}^a dans la colle. Comme cela est précisé au paragraphe 4.3.5, il est nécessaire de vérifier $\frac{\beta d}{H} < 1$, condition non vérifiée ici. Deux cas choisis pour lesquels cette condition est vérifiée sont ici considérés. Ces cas sont respectivement : un essai de traction biaxiale caractérisé par $\sigma_{xx}^\infty = 300$ MPa et $\sigma_{yy}^\infty = 300$ MPa ainsi qu'un autre essai où ces valeurs deviennent $\sigma_{xx}^\infty = 150$ MPa et $\sigma_{yy}^\infty = 300$ MPa. Les distributions des contraintes dans le deuxième essai ont été soustraites aux distributions obtenues avec le premier essai afin d'avoir les distributions des contraintes qui nous intéressent.

Les contraintes dans le patch composite sont tout d'abord analysées. La distribution de la contrainte longitudinale σ_{xx}^p dans le patch composite est quasi unidirectionnelle. En effet, les coefficients de Poisson sont quasi identiques (0,32 pour le substrat contre 0,28 pour le composite) suivant la direction x , n'entraînant pas de couplage bidimensionnel important. Cette petite différence des coefficients de Poisson est tout de même suffisante pour faire apparaître des contraintes transversales σ_{yy}^p dans le composite. Il faut noter que cette contrainte transversale σ_{yy}^p est environ cent fois inférieure à la contrainte longitudinale σ_{xx}^p . La distribution de la contrainte transversale σ_{yy}^p est fortement marquée par un caractère bidimensionnel lié au transfert d'effort suivant la direction x . En effet, le patch composite renforce énormément le substrat suivant la direction x créant une forte différence de soulagement entre le bord libre et le milieu du substrat. Cette forte différence se répercute sur l'effet

de Poisson, entraînant de ce fait une forte différence de la contrainte transversale σ_{yy}^p entre le bord libre $x = 0$ et le milieu du substrat. Cette différence de contrainte transversale σ_{yy}^p entraîne des pics de cisaillement σ_{yz}^a aux quatre coins de la colle. Ces pics de cisaillement restent cependant négligeables par rapport au cisaillement σ_{xz}^a dans la colle. Il est à noter qu'une solution unidimensionnelle classique est ici suffisante pour calculer les distributions de σ_{xx}^p et de σ_{xz}^p .

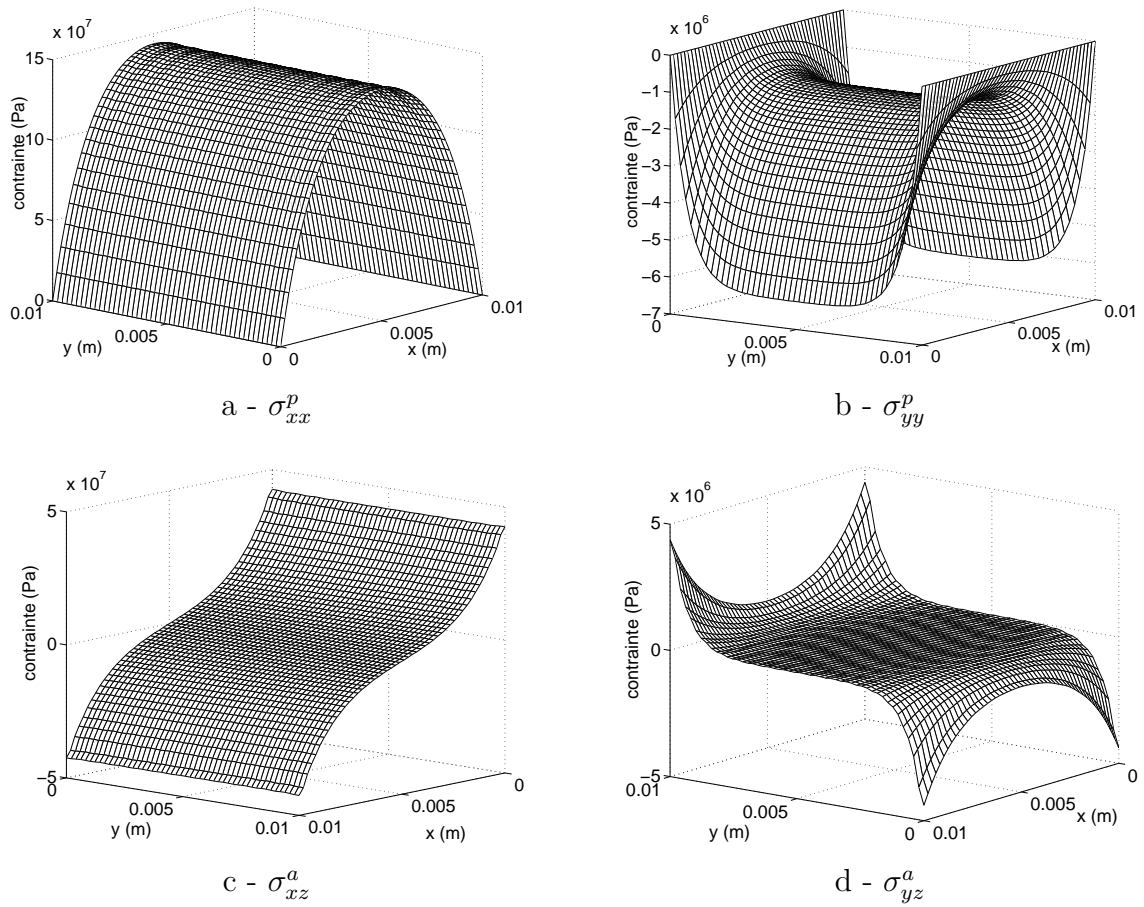


FIG. 5.4 – Distributions des contraintes dans le cas d'un essai de traction uniaxiale à 0 degré.

Le Tableau 5.2 représente les contraintes maximales de chaque matériau ainsi que les rapports des contraintes maximales avec leur résistance respective.

La colle possède le plus grand rapport de défaillance suivant la direction x . Elle cédera donc en premier. Suivant la direction y , les rapports sont négligeables par rapport aux contraintes suivant x . Il est à noter que la défaillance de la colle se produira bien avant la défaillance des deux autres matériaux constitutifs à la vue des rapports.

| | Composite | Aluminium | Colle |
|---------------------------------------|-----------|-----------|--------------|
| Contrainte suivant x maximale (MPa) | 143 | 78 | 43 |
| Contrainte suivant y maximale (MPa) | 6,25 | 3,13 | 4,4 |
| Critère de rupture (%) | 6,1 | 3 | 117,8 |

TAB. 5.2 – Contraintes maximales dans le cas d'un essai de traction à 0 degré.

5.4 Traction uniaxiale sur un patch à 90 degrés

Le substrat est soumis ici à une contrainte longitudinale $\sigma_{xx}^\infty = 150$ MPa (voir Figure 5.5).

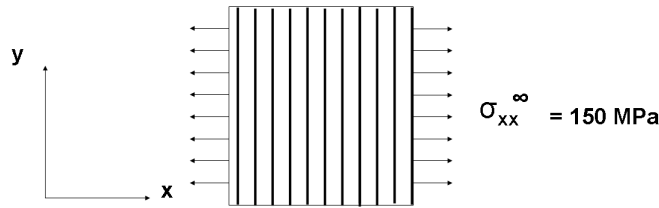


FIG. 5.5 – Essai de traction uniaxiale à 90 degrés.

Comme dans l'essai précédent, une combinaison de solutions a été utilisée pour vérifier la condition $\frac{\beta d}{H} < 1$. Ces solutions sont respectivement celles de deux essais : un essai de traction biaxiale de valeurs $\sigma_{xx}^\infty = 300$ MPa et $\sigma_{yy}^\infty = 300$ MPa a été effectué ainsi qu'un autre essai de valeurs $\sigma_{xx}^\infty = 300$ MPa et $\sigma_{yy}^\infty = 150$ MPa. Les distributions des contraintes du deuxième essai ont été soustraites aux distributions du premier essai afin d'avoir les distributions des contraintes qui nous intéressent. La Figure 5.6 représente les distributions de σ_{xx}^p , σ_{yy}^p dans le patch composite et de σ_{xz}^a , σ_{yx}^a dans la colle.

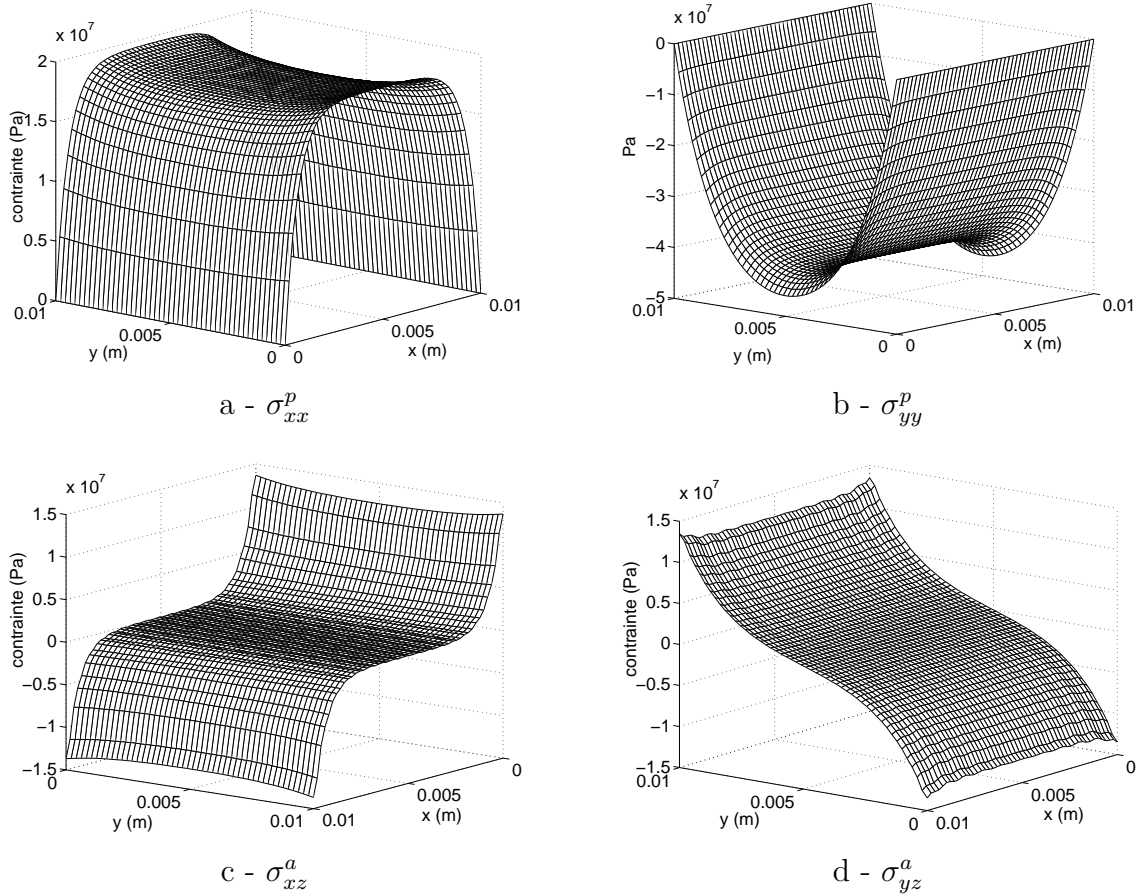


FIG. 5.6 – Distributions des contraintes dans le cas d'un essai de traction uniaxiale à 90 degrés.

Les distributions des contraintes dans le composite sont toutes les deux bidimensionnelles. La contrainte longitudinale σ_{xx}^p dans le patch composite est maximale sur les bords libres suivant y du patch composite. Ce phénomène est dû au couplage entre les deux directions et ne peut pas être calculé avec une analyse unidirectionnelle classique. La différence des coefficients de Poisson entre le substrat et le patch composite a pour conséquence de créer des contraintes transversales σ_{yy}^p dans le composite qui sont plus importantes que les contraintes longitudinales σ_{xx}^p . En effet, suivant la direction x , le patch composite est beaucoup moins rigide que le substrat (10 GPa pour le composite contre 72 GPa pour le substrat), alors que suivant la direction y le patch composite est 2,5 fois plus rigide que le substrat. De plus, le coefficient de Poisson mineur dans le composite est pratiquement nul, ce qui a pour effet de transmettre la quasi totalité de l'effet de Poisson du substrat au patch composite. La contrainte transversale σ_{yy}^p est plus importante sur les bords libres longitudinaux. Le patch composite ne renforce pas dès le bord libre, créant de ce fait une contrainte transversale σ_{yy}^p plus importante. Cette contrainte plus importante aux bords libres

longitudinaux provoquent l'apparition de légers pics de cisaillement σ_{xz}^a et σ_{yz}^a aux quatres coins de la colle. Il est à noter que le cisaillement dans la colle suivant la direction y est beaucoup plus important que suivant la direction x . Le Tableau 5.3 représente les contraintes maximales de chaque matériau ainsi que les rapports des contraintes maximales avec leur résistance respective.

| | Composite | Aluminium | Colle |
|---------------------------------------|-------------|-----------|-------|
| Contrainte suivant x maximale (MPa) | 19 | 140 | 14 |
| Contrainte suivant y maximale (MPa) | 46 | 23 | 13 |
| Critère de rupture (%) | 36,4 | 8,7 | 23 |

TAB. 5.3 – Contraintes maximales dans le cas d'un essai de traction à 90 degrés.

Le matériau composite possède le plus grand rapport et sera la cause de défaillance du fait de sa faible résistance transversale.

5.5 Essai de cisaillement

Le substrat est soumis ici à une contrainte de cisaillement $\sigma_{xy}^\infty = 150$ MPa (voir Figure 5.7).

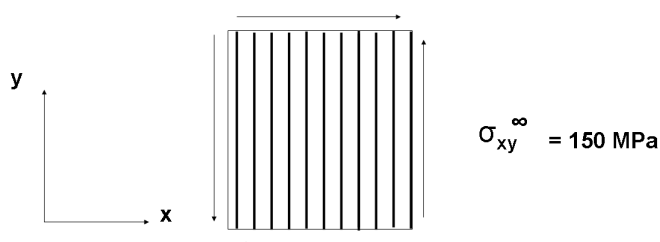


FIG. 5.7 – Essai de cisaillement.

La Figure 5.8 représente les distributions σ_{xy}^p dans le patch composite et σ_{xz}^a dans la colle.

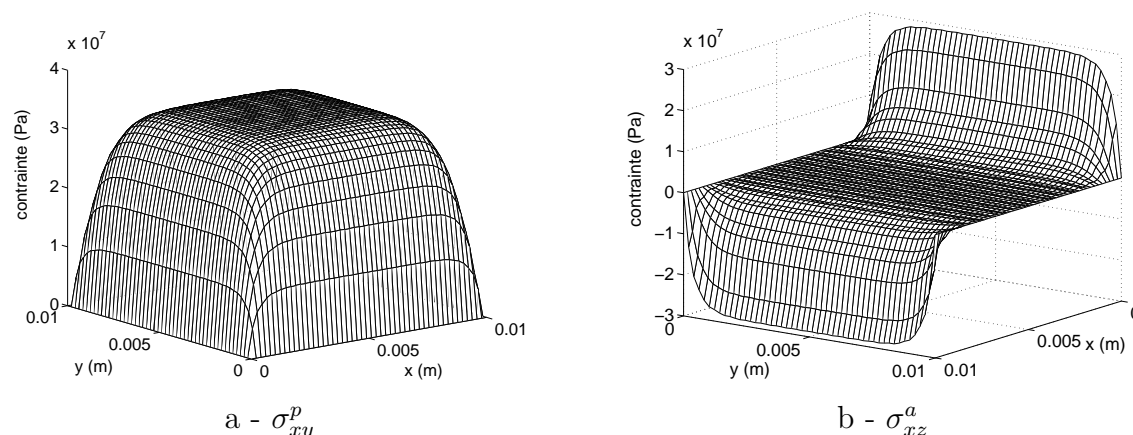


FIG. 5.8 – Distributions des contraintes dans le cas d'un essai de cisaillement.

La distribution des contraintes de cisaillement dans le composite dépend des deux directions du problème. Le cisaillement plan dans le composite est maximal au centre du patch et nul aux quatre bords libres du patch. Cette distribution des contraintes de cisaillement dans le renfort entraîne un pic de cisaillement dans la colle aux milieux des quatres bords libres. Il faut rappeler que le pic de cisaillement est en réalité situé juste derrière le bord libre et non au niveau du bord libre. Sur la Figure 5.8, seule la composante de cisaillement σ_{xz}^a dans la colle est représentée. Du fait de la symétrie géométrique et matérielle du problème, la distribution de la contrainte de cisaillement σ_{yz}^a est la même.

Le Tableau 5.4 représente les contraintes maximales de chaque matériau ainsi que les rapports des contraintes maximales avec leur résistance respective.

| | Composite | Aluminium | Colle |
|---------------------------|-----------|-----------|------------|
| Contrainte maximale (MPa) | 34 | 68 | 29 |
| Rapport (%) | 18 | 7,2 | 106 |

TAB. 5.4 – Contraintes maximales dans le cas d'un essai de cisaillement.

Dans le cas d'un essai de cisaillement, la colle possède le plus grand rapport de défaillance. La colle cédera donc en premier des trois matériaux. En effet, la colle est soumis à deux contraintes de cisaillement importantes $\sigma_{xz}^a = \sigma_{yz}^a = 29$ MPa pour une résistance en cisaillement égale à 40 MPa.

5.6 Influence des paramètres

Afin de pouvoir quantifier les paramètres influant sur le caractère bidimensionnel du renforcement de structure par matériau composite, une étude paramétrique

est effectuée dans le cas d'essais de traction biaxiale. La quantité Φ_m , définie dans l'Equation (4.62), représente un indicateur de biaxialité. Rappelons que Φ_m petit signifie que le comportement de la structure est fortement bidimensionnel et que Φ_m grand signifie que le comportement tend vers un comportement unidimensionnel (voir paragraphe 4.3.3). L'essai de traction biaxiale est celui traité au paragraphe 5.2. L'influence du coefficient de Poisson du substrat est d'abord analysée. Ensuite l'influence de l'orthotropie du composite est étudiée ainsi que l'influence de la longueur du patch composite. Pour chaque paramètre, seule l'influence sur le premier décalage Φ_1 est étudiée avec différentes valeurs du rapport $r = \frac{\sigma_{xx}^\infty}{\sigma_{yy}^\infty}$. Ce rapport r est calculé en fixant la valeur σ_{xx}^∞ égale à 150 MPa et en faisant varier la valeur σ_{yy}^∞ . Il est à noter que les valeurs des autres coefficients Φ_m sont de l'ordre de grandeur de Φ_1 . De plus, Φ_1 a le plus d'influence dans la double série de Fourier vu le dénominateur contenant m (voir Equation (4.34)).

5.6.1 Influence du coefficient de Poisson du substrat

La Figure 5.9 représente le décalage Φ_1 en fonction de ν_s .

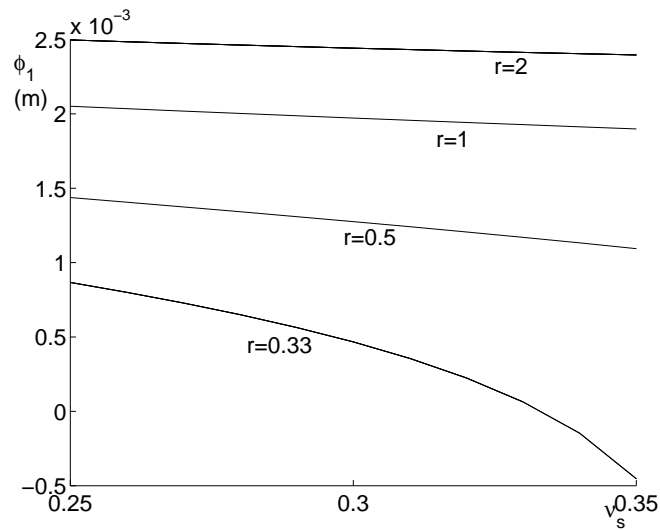


FIG. 5.9 – Influence du coefficient de Poisson du substrat.

Le coefficient de Poisson du substrat joue un rôle essentiel sur le comportement bidimensionnel du renforcement. Son influence est cependant beaucoup plus forte dans le cas où le rapport $r = \frac{\sigma_{xx}^\infty}{\sigma_{yy}^\infty}$ est faible. Pour des faibles valeurs de r , la variation de Φ_1 est fortement non linéaire. Cela s'explique par le fait que les décalages sont nuls lorsque $\nu_s = \frac{\sigma_{yy}^\infty}{\sigma_{xx}^\infty}$. La connaissance précise de ν_s pour des faibles valeurs de r est importante, car une faible variation de ν_s entraîne une forte variation du comportement bidimensionnel du fait de la non linéarité importante dans ce cas-

là. Dans le cas de valeurs élevées de r , une connaissance précise de ν_s n'est pas nécessaire puisque l'évolution est faible, entraînant de ce fait une faible variation du comportement bidimensionnel.

5.6.2 Influence de l'épaisseur de la colle

La Figure 5.10 représente le décalage Φ_1 en fonction de e_a .

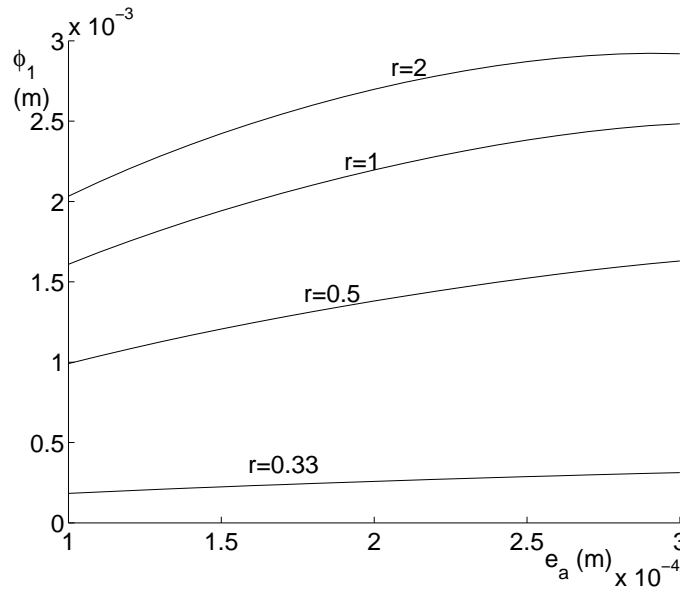


FIG. 5.10 – Influence de l'épaisseur de la colle.

L'épaisseur de la colle est un paramètre déterminant sur le comportement bidimensionnel du renforcement. Son influence est cependant beaucoup plus forte dans le cas où le rapport $r = \frac{\sigma_{xx}^\infty}{\sigma_{yy}^\infty}$ est important. Pour des valeurs de r élevées, la variation de Φ_1 est fortement non linéaire, alors que dans le cas de valeurs faibles de r , Φ_1 est quasi constant.

5.6.3 Influence du module transversal du composite

La Figure 5.11 représente le décalage Φ_1 en fonction de E_y . Le rapport d'orthotropie $\frac{E_y}{E_x}$ est aussi représenté sur la Figure 5.11. Ce rapport d'orthotropie est calculé en fixant la valeur E_x égale à 181 GPa et en faisant varier la valeur E_y .

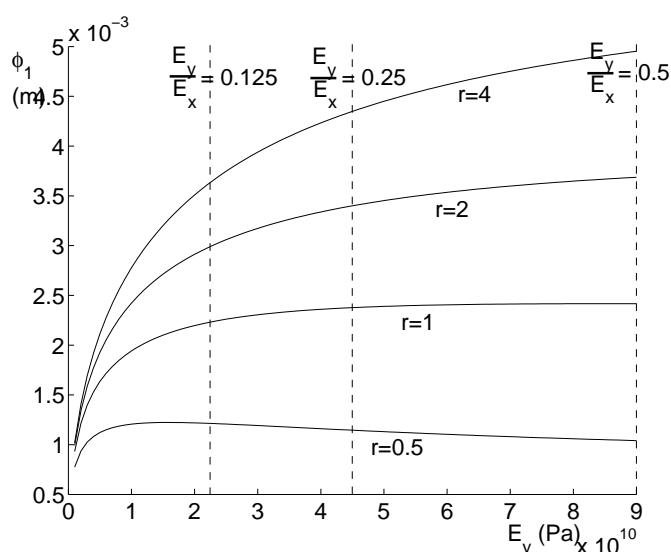


FIG. 5.11 – Influence du module transversal du composite.

La variation du premier décalage Φ_1 dépend fortement de r . Pour des valeurs élevées de r , Φ_1 augmente rapidement pour des faibles valeurs de E_y puis décroît lentement lorsque E_y augmente. Cela signifie que le rapport d'orthotropie doit être précisément connu pour des valeurs faibles de celui-ci lorsque r est élevé. Le rapport d'orthotropie a très peu d'influence sur le caractère bidimensionnel lorsqu'il augmente.

Pour des faibles valeurs de r , la variation de Φ_1 est moins marquée par sa non-linéarité. Mais plus les valeurs de r sont faibles, plus le comportement bidimensionnel est important.

5.7 Patchs de formes quelconques utilisés pour le renforcement de plaques trouées

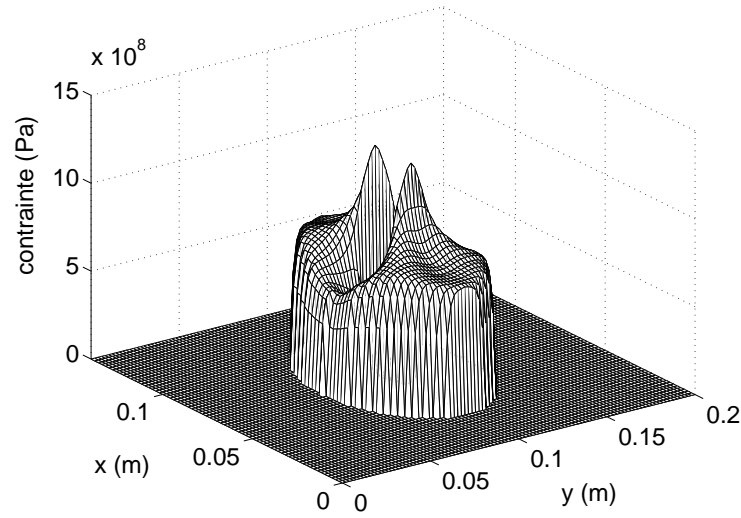
5.7.1 Introduction

Dans ce paragraphe, la résolution par différences finies décrite dans le paragraphe (4.6) est couplée au code d'éléments finis Ansys 7.0 afin d'étudier l'influence de la topologie des renforts sur le cisaillement maximal dans la colle. Rappelons qu'Ansys sert ici pour trouver les conditions aux limites en contraintes du modèle par différences finies. Les caractéristiques du problème mécanique et du modèle par éléments finis sont celles décrites dans le chapitre 2 de la partie 2. Rappelons que la direction de sollicitation est la direction y . Dans un premier temps, deux patchs composites carbone/époxyde sont utilisés afin de renforcer une plaque d'aluminium. Ces deux patchs ont une aire égale à 20% de la plaque et ont respectivement une forme circulaire et carrée. Ensuite, une étude sur l'un des patchs optimisés par algo-

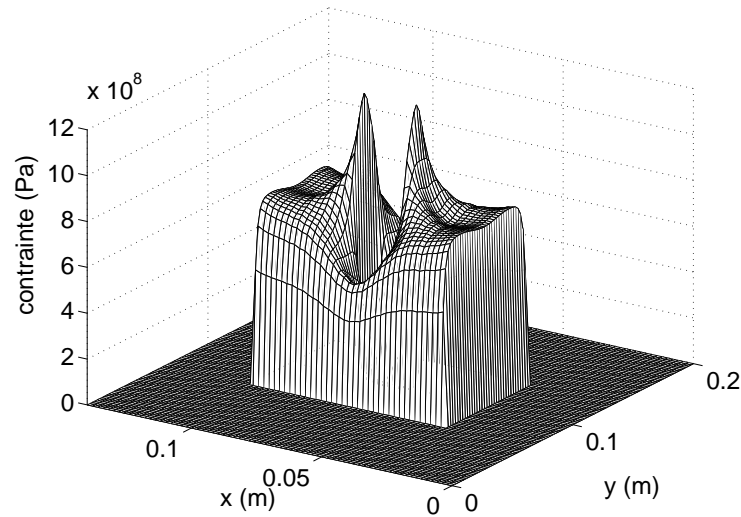
l'algorithme génétique de la première partie est effectuée. Par manque de temps, le calcul n'a été conduit que pour un maillage donné jugé déjà relativement fin, mais une étude de convergence vers les points singuliers mériterait d'être conduite.

5.7.2 Comparaison de patches circulaire et rectangulaire

La Figure 5.12 représente les distributions des contraintes dans le composite dans les cas de renforts circulaire et carré.



a - σ_{yy}^p dans le cas d'un renfort circulaire

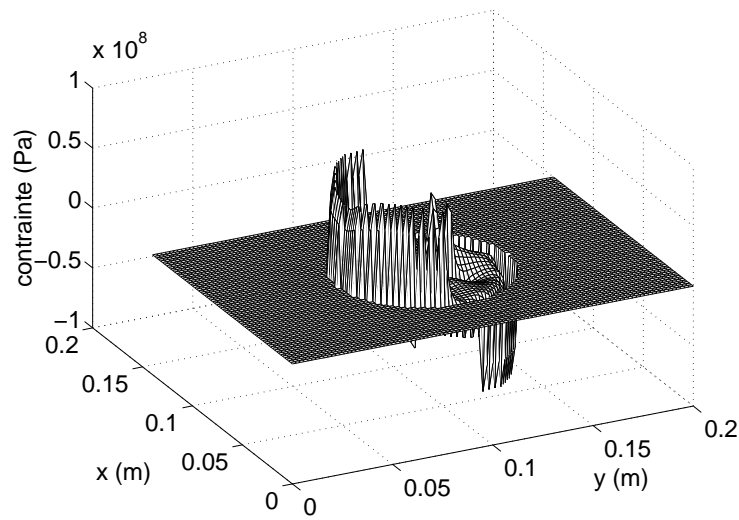


b - σ_{yy}^p dans le cas d'un renfort carré

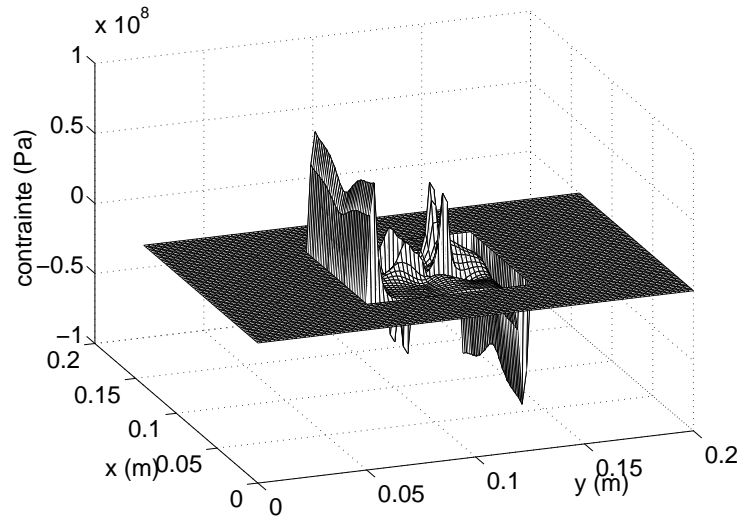
FIG. 5.12 – Distributions des contraintes longitudinales σ_{yy}^p dans le patch composite dans les cas de renforts circulaire et carré soumis à de la traction.

De tels renforts sont classiquement utilisés pour réparer des zones endommagées

[51]. La qualité du renfort s'évalue, entre autre, par le renforcement créé au centre du patch composite. Les renforcements créés par les deux renforts sont quasiment égaux. Sur la Figure 5.12, il est intéressant de noter que la contrainte longitudinale σ_{yy}^p est maximale autour de la zone à renforcer. Un autre facteur qui permet d'évaluer la pertinence du renforcement est le cisaillement maximal engendré dans la colle. La Figure 5.13 représente les distributions des contraintes de cisaillement σ_{yz}^a dans les cas de renforts circulaire et carré. Il est à noter que la composante σ_{xz}^a dans la colle est quasi nulle.



a - σ_{yz}^a dans le cas d'un renfort circulaire



b - σ_{yz}^a dans le cas d'un renfort carré

FIG. 5.13 – Distributions des contraintes de cisaillement dans la colle dans les cas de renforts circulaire et carré dans le cas d'un essai de traction.

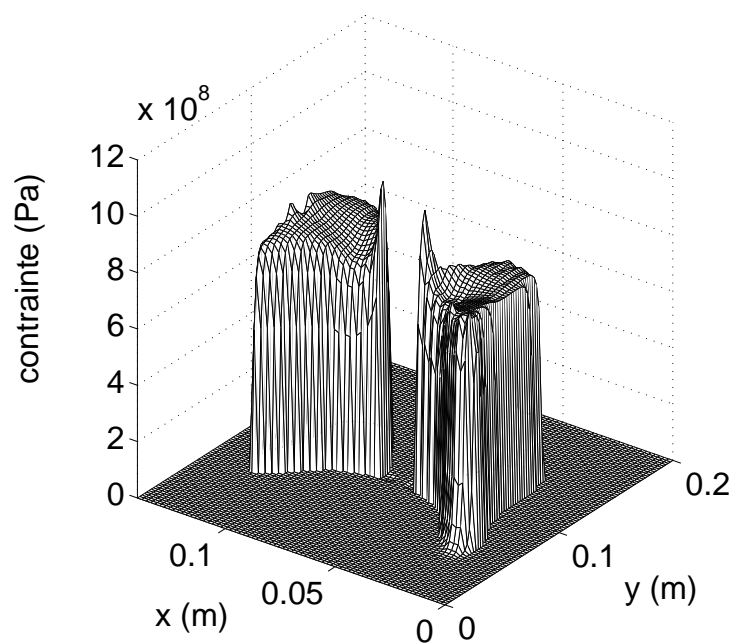
Dans le cas d'un patch circulaire, la contrainte de cisaillement est plus importante, en valeur absolue, sur la périphérie extérieure du renfort qu'à l'intérieur de celui-ci. Le cisaillement maximal σ_{yz}^a se situe sur la périphérie du cercle suivant l'axe y . Dans le cas d'un patch carré, le cisaillement maximal se situe aux quatre coins du renfort. De plus, le cisaillement maximal est légèrement plus important dans le cas du patch carré (85 MPa) que dans le cas du patch circulaire (82 MPa). On peut souligner que la singularité géométrique due aux coins du rectangle n'entraîne finalement pas une augmentation importante du cisaillement transverse. Ces deux formes de patches composites (carré et circulaire) sont classiquement utilisées dans le domaine de la maintenance aéronautique. Il est donc intéressant de comparer ces patches composites au patch composite optimisé de la première partie dans le cas d'une plaque trouée (voir chapitre 3, partie 2).

5.7.3 Patch optimisé

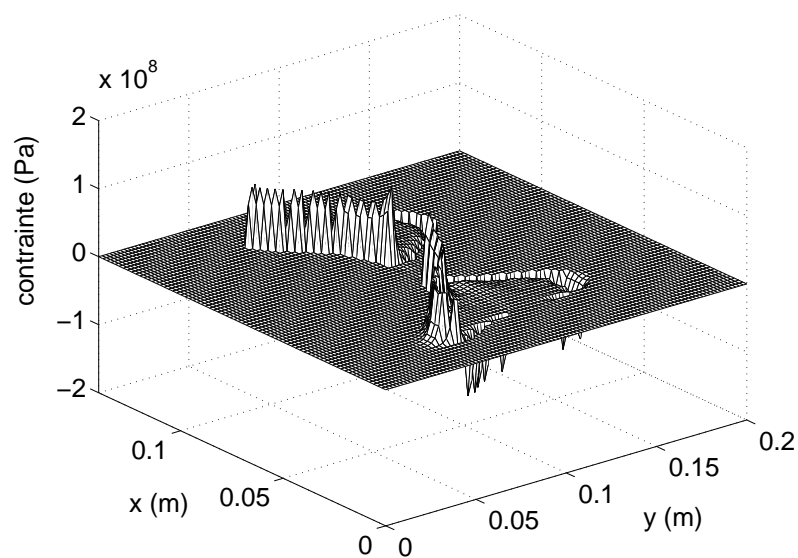
La Figure 5.14 représente les contraintes longitudinales σ_{yy}^p dans le patch composite et de cisaillement σ_{yz}^p dans la colle dans le cas du patch optimisé par algorithme génétique du chapitre 3 de la partie 2 dans le cas de l'essai de traction (voir Figure 3.2).

La résolution par différences finies permet d'obtenir le transfert des efforts du substrat vers le composite dans le cas des patches optimisés du chapitre 3 de la deuxième partie. Elle permet aussi de quantifier le niveau de contraintes dans la colle. Il est intéressant de noter que le cisaillement maximal dans la colle est égal à 111 MPa et qu'il est situé à proximité de la zone interdite.

Le Tableau 5.5 présente les contraintes maximales dans le composite et dans la colle obtenues pour des patches de formes carré, circulaire et en forme de spline. Le rapport entre la contrainte maximale et la résistance du composite est maximal dans le cas d'un patch circulaire. Le patch carré a un rapport quasi identique, alors que le rapport du patch défini par une spline a un rapport nettement plus faible. Le rapport entre la contrainte maximale et la résistance de la colle est maximal dans le cas d'un patch défini par une spline et minimal dans le cas d'un patch circulaire.



a - σ_{yy}^p dans le cas d'un renfort optimisé



b - σ_{yz}^a dans le cas d'un renfort optimisé

FIG. 5.14 – Distributions des contraintes dans le composite et dans la colle dans le cas d'un patch optimisé.

| | Composite | Colle |
|---------------------------------------|-----------|--------------|
| Résistance (MPa) | 1786 | 40 |
| Patch carré | | |
| Contrainte maximale suivant y (MPa) | 1244 | 85 |
| Rapport (%) | 70 | 212 |
| Patch circulaire | | |
| Contrainte maximale suivant y (MPa) | 1266 | 82 |
| Rapport (%) | 71 | 205 |
| Patch optimisé | | |
| Contrainte maximale suivant y (MPa) | 1030 | 111 |
| Rapport (%) | 58 | 277,5 |

TAB. 5.5 – Contraintes maximales dans le cas de patches carré, circulaire et en forme de spline.

5.8 Conclusion

Une approche de renforcement de plaques par patches composites a été proposée afin de quantifier le comportement bidimensionnel du renforcement. Cette approche permet de calculer les distributions des contraintes dans le composite et dans la colle. Diverses applications ont été effectuées. Elles ont permis de montrer :

- la défaillance du matériau composite dans plusieurs cas. En effet, le matériau composite utilisé a une très faible résistance perpendiculairement aux fibres et en cisaillement. Il est donc nécessaire de connaître précisément la nature des charges appliquées pour utiliser le matériau composite adéquat ;
- un comportement bidimensionnel de la structure renforcée. En effet, dans certains cas, la distribution des contraintes dans le composite et dans la colle dépend des deux directions du problème ;
- l'influence des paramètres sur la biaxialité de la solution trouvée. Une étude paramétrique a été effectuée sur un jeu de données précis. Cette étude montre que dans certains cas, il est nécessaire de connaître précisément les valeurs des données. En effet, une petite variation de ces paramètres peut entraîner une grande variation de la biaxialité et des contraintes dans le composite et dans la colle ;
- les distributions des contraintes dans la colle en couplant le programme par différences finies avec un code de calcul par éléments finis. L'application concerne les patches utilisés dans la partie 2 afin de renforcer une plaque trouée. Le patch en forme de spline est le patch qui renforce le mieux la zone à soulager, mais c'est aussi ce dernier qui possède le critère de défaillance le plus élevé.

Cette approche mériterait d'être appliquée aux voilures, mais ce travail, *a priori* beaucoup plus complexe du fait de la géométrie, n'a pas pu être réalisé par manque de temps. La Figure 5.15 représente le résumé et les principales notions abordées dans ce chapitre.

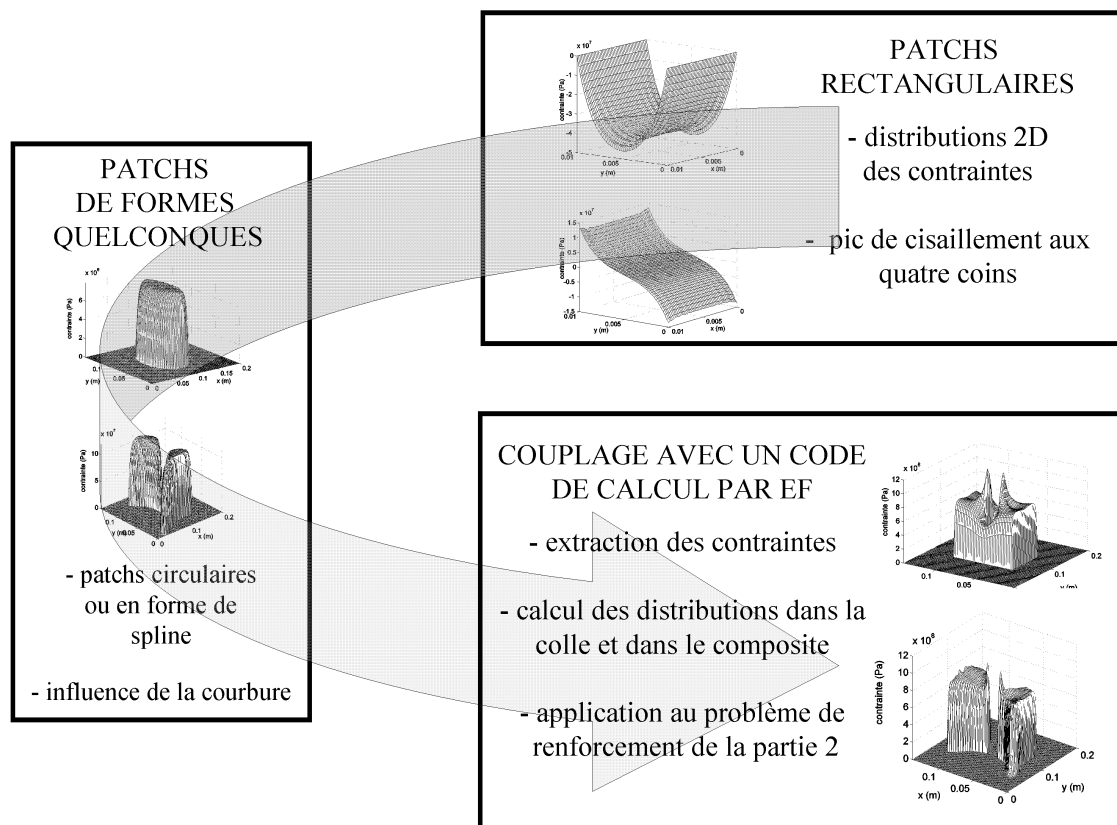


FIG. 5.15 – Résumé du chapitre 5.

Quatrième partie

Etude expérimentale du renforcement de structure par matériau composite

Chapitre 6

Etude expérimentale

6.1 Introduction

Les objectifs de ce chapitre sont au nombre de trois :

- le premier objectif est d’étudier expérimentalement la zone de transfert d’effort dans le cas de patchs rectangulaires et de mettre en évidence les phénomènes bidimensionnels étudiés dans les paragraphes précédents. Afin de caractériser cette zone de transfert d’effort et ces phénomènes bidimensionnels, une méthode de mesure de champs cinématiques sans contact a été choisie. Cette méthode, la méthode de la grille développée par Surrel [76], est accompagnée du logiciel de post-traitement Frangyne ;
- le deuxième objectif de ce chapitre est de comparer les résultats calculés avec le programme par différences finies développé dans le chapitre 5 et les résultats calculés à partir des essais expérimentaux. Des essais de traction sont conduits sur des éprouvettes renforcées par des patchs circulaires et rectangulaires afin de valider le programme par différences finies ;
- le dernier objectif, et non le moindre, est de comparer les résultats calculés par le modèle par éléments finis de l’AG développé dans le chapitre 2 avec les résultats calculés à partir des essais expérimentaux. Il est en effet nécessaire de quantifier l’influence des hypothèses mécaniques effectuées pour le modèle utilisé car le transfert d’effort du substrat vers le composite n’est pas pris en compte dans l’AG. Une comparaison des champs cinématiques expérimental et numérique est effectuée pour évaluer l’influence de cette hypothèse.

Les éprouvettes au nombre de une pour chacun des 3 types ont été préparées et fournies par l'Atelier Industriel Aéronautique (AIA) de Clermont-Ferrand. Le substrat est en aluminium 2024 T3 d'épaisseur égale à 4 mm. Le patch composite utilisé est un carbone/époxyde T300/914 constitué de 4 plis unidirectionnels. L'épaisseur totale du patch est égale à 0,5 mm. La colle utilisée est de type Redux 312 avec une épaisseur nominale estimée à 0,15 mm. Le collage du patch composite sur l'aluminium est obtenu par polymérisation à 120 °C de la colle Redux 312. Les propriétés mécaniques utiles des différents matériaux, fournies par l'AIA, sont reportées Tableau 1.2. Deux types de critère de rupture sont utilisés pour évaluer l'élément le plus faible du renfort : le critère de Tsai-Wu pour le matériau composite (voir Equation (1.10)) et le critère de Von Mises pour l'aluminium et pour la colle (voir Equation (1.11)).

6.2.2 Pilotage des essais

Les essais quasi statiques de traction uniaxiale sont pilotés en déplacement de traverse à l'aide d'une machine Schenck de capacité 250 kN(voir Figure 6.2).

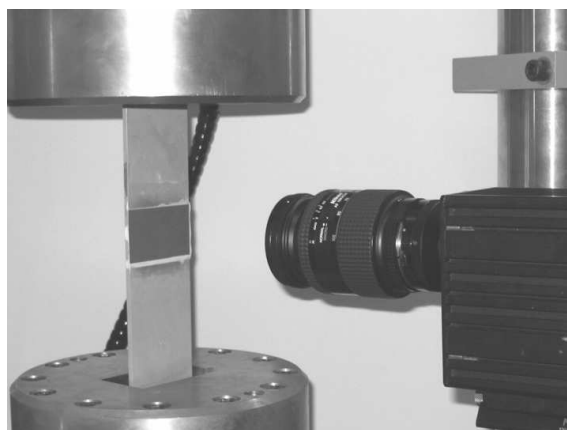


FIG. 6.2 – Epreuve renforcée soumise à un essai de traction

Le déplacement imposé maximum est de 0,3 mm avec une vitesse de déplacement du mors mobile de 0,01 mm/s. Cette valeur maximale de déplacement a été estimée de telle sorte que le cisaillement transverse calculé dans la colle ne dépasse pas le cisaillement à rupture et ne conduise pas à un décollement des patches. La caméra est positionnée face au composite. La zone observée représente un carré de 40×40 mm². Afin de vérifier la répétabilité de la mesure, plusieurs essais de traction identiques ont été effectués en démontant et remontant les éprouvettes étudiées. Au total, plus de 300 essais de traction ont été réalisés. A partir des champs expérimentaux obtenus, seuls les essais les plus représentatifs sont présentés par la suite. Il faut donc noter

qu'aucun essai n'a été mené à rupture, l'objectif étant avant tout ici d'examiner la réponse des éprouvettes dans le domaine élastique.

6.3 Méthode de la grille

L'utilisation de jauges de déformation permet d'obtenir des informations ponctuelles de l'état mécanique d'une structure. Certaines méthodes de mesure sans contact permettent quant à elles d'accéder à des champs de déplacements en surface d'échantillon. Les applications se font sous l'hypothèse d'une cinématique plane. La grandeur mécanique mesurable est le déplacement de chaque point et la dérivation spatiale de cette information permet d'obtenir le champ de déformations de la structure étudiée. Du fait de l'échelle où s'effectue le phénomène à observer, la méthode de la grille développée par Surrel [76] a été choisie. Il est à noter que cette méthode a été utilisée avec succès dans différentes applications [23] [63] [4] [32] [83].

6.3.1 Principe

La méthode de la grille consiste tout d'abord à déposer une grille sur la surface d'une pièce non déformée. Cette grille est composée de traits parallèles équidistants et contrastés. Elle peut être soit unidirectionnelle, soit croisée. Cette grille est déposée sur la zone étudiée soit par collage, transfert ou autre. La grille est supposée parfaitement collée à la surface. L'intensité $I(M)$ au point M de coordonnées (x, y) s'écrit dans son état initial :

$$I(M) = \frac{I_0}{2} [1 + \gamma \text{frgn}(2\pi \vec{F} \cdot \overrightarrow{OM})] \quad (6.1)$$

γ représente le contraste de l'intensité $I(M)$, I_0 représente l'intensité moyenne et \vec{F} représente le vecteur fréquence spatiale de la grille. frgn représente une fonction périodique de période 2π . Soit $\vec{u}(M)$ le déplacement d'un point de la grille entre l'état initial et l'état déformé. L'inverse du déplacement $\vec{u}^{-1}(M)$ est supposé égal à l'opposé du déplacement de $\vec{u}(M)$ (voir Figure 6.3).

A l'état final, $I(M')$ s'écrit dans le cas unidirectionnel :

$$I(M') = \frac{I_0}{2} [1 + \gamma \text{frgn}(2\pi \vec{F} \cdot \overrightarrow{OM} + 2\pi \vec{F} \cdot \vec{u}(M))] \quad (6.2)$$

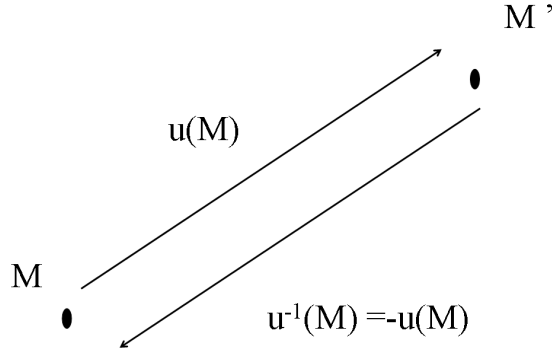


FIG. 6.3 – Champ de déplacements $\vec{u}(M)$.

De cette expression apparaît une phase $\Phi(M)$ telle que :

$$I(M') = \frac{I_0}{2} [1 + \gamma \text{frgn}(2\pi \vec{F} \cdot \overrightarrow{OM} + \Phi(M))] \quad (6.3)$$

Cette modulation de phase s'écrit :

$$\Phi(M) = 2\pi \vec{F} \cdot \vec{u}(M) \quad (6.4)$$

Dans le cas d'une grille croisée, les modulations de phase suivant les directions x et y s'écrivent de manière analogue. La composante suivant la direction x s'écrit :

$$\Phi_x(M) = \frac{2\pi}{p_x} u_x(M) \quad (6.5)$$

La composante suivant la direction y s'écrit :

$$\Phi_y(M) = \frac{2\pi}{p_y} u_y(M) \quad (6.6)$$

p_x et p_y représentent les pas de la grille suivant les directions x et y respectivement. $u_x(M)$ et $u_y(M)$ sont les composantes du champ de déplacements suivant les directions x et y . Le principe de la méthode de la grille est donc de transformer le champ de déplacements en une modulation de phase.

6.3.2 Evaluation du champ de déformations

Une fois le champ de phase $\Phi(M)$ obtenu par un logiciel, le champ de déformations devient accessible car par définition :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i} \right) \quad (6.7)$$

En considérant que les pas p_x et p_y valent tous les deux p , cette équation devient :

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{p}{4\pi} (\Phi_{i,j} + \Phi_{j,i}) \quad (6.8)$$

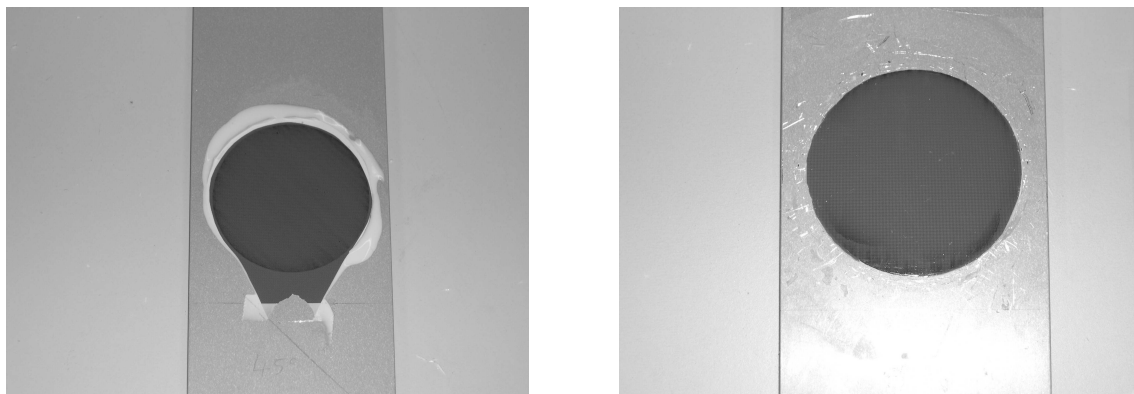
Ainsi, le champ de déformations devient accessible par dérivation numérique.

6.3.3 Transfert de grille

Des grilles unidirectionnelles et bidirectionnelles sont ici utilisées de manière à obtenir les déplacements sur le composite dans les directions longitudinale et transversale de l'éprouvette. Le pas de la grille est de 200 μm . La méthode de dépôt de la grille choisie est la méthode de transfert décrite dans [64]. Une presse a été utilisée pour le collage des patchs composites sur la plaque l'aluminium : l'empreinte de la presse est suffisante afin d'obtenir un état de surface de composite suffisamment rugueux pour un transfert efficace de la grille. La colle utilisée pour le collage de la grille est la colle E504 fourni par Epotecnny. Cette colle acquiert ses propriétés mécaniques optimales après une cuisson de 40 h à 37 °C. La procédure de collage et de transfert est décrite plus amplement dans [64]. Une caméra CCD 1024×1024 pixels est utilisée afin de prendre une image avant et après le chargement de l'éprouvette. 5 pixels par période de grille sont utilisés, ce qui permet de visualiser une surface carrée de 40×40 mm². La résolution de la mesure de déplacement est de 1 μm . Afin de transformer la différence des intensités lumineuses en champ de déplacements, un algorithme baptisé (2N-1) est utilisé, où N correspond au nombre de pixels par période de grille [76]. Cette algorithme utilise 2N-1 pixels afin de calculer le déplacement. La résolution spatiale de la mesure de déplacement est donc égale dans notre cas à 2N-1 pixels, soit 360 μm .

Afin d'utiliser la méthode de la grille sur des patchs de formes diverses, la procédure suivante, illustrée par la Figure 6.4 dans le cas d'un patch circulaire, a été utilisée. Dans un premier temps, une grille croisée un peu plus grande que le patch composite a été transférée (voir Figure 6.4a). Ensuite, les parties de grille

superflues ont été retirées au moyen d'un scalpel pour avoir une forme de grille qui soit le plus proche possible de la forme du patch composite (voir Figure 6.4b).



a - Transfert de grille sur un patch circulaire. Etat après le collage

b - Suppression des parties de grille superflues

FIG. 6.4 – Exemple de transfert de grille pour un patch composite circulaire.

6.4 Traitement des résultats

En pratique, du bruit ainsi que certaines valeurs aberrantes de déplacement viennent perturber les champs de déplacements obtenus par la méthode de la grille. Ce bruit et ces valeurs aberrantes ont plusieurs origines. Ils proviennent aussi bien du bruit intrinsèque de la caméra que d'un défaut de collage de la grille. Afin de réaliser une dérivation correcte des mesures effectuées, une procédure spécifique a été réalisée. Tout d'abord, pour atténuer certaines valeurs aberrantes, les champs de déplacements sont d'abord convolués par un carré de dimensions 18×18 pixels, centré sur chaque pixel, avec des conditions aux limites répliquées sur les bords de l'image. L'extraction du champ de déformations à partir du champ de déplacements est un point critique avec les techniques de mesure de champs sans contact. En effet, la dérivation du champ de déplacements amplifie les erreurs et un lissage trop important de ce dernier détériore la résolution spatiale. Ce point est important ici car le champ de déformations du composite est utilisé pour calculer le champ de contraintes en son sein. De plus, ce champ de contraintes est lui aussi dérivé afin d'obtenir le champ de contraintes dans la colle (voir Equation (1.7)). En d'autres termes, le champ de déplacements mesuré est dérivé deux fois, ce qui peut entraîner d'importantes erreurs dues au bruit.

De nombreuses méthodes pour lisser et dériver les champs de déplacements sont disponibles dans la littérature [77]. Quelques unes de ces méthodes sont implémentées dans le logiciel Frangyne. Ces méthodes sont cependant basées sur une approche

locale afin d'obtenir le champ de déformations. Dans notre cas, la stratégie utilisée consiste à utiliser la nature des champs mesurés. La forme globale du champ de déplacements est en effet très proche de la solution analytique unidimensionnelle colonne par colonne, même si des variations sont susceptibles d'intervenir dans le cas d'un patch composite avec des fibres orientées à 90 degrés. La procédure développée ici consiste donc à lisser le champ de déplacements colonne par colonne avec une fonction de la même forme que la solution analytique unidimensionnelle, d'abord suivant une première direction puis suivant la seconde direction. De ce fait, une telle fonction est facilement dérivable afin d'obtenir les champs de contraintes dans le composite et dans la colle. Pour chaque colonne de la zone observée, la distribution unidimensionnelle du déplacement expérimental u_x est lissée en utilisant une fonction similaire à la solution théorique unidimensionnel de l'Equation (1.9), soit :

$$u_{x,lisse}^p(x) = \frac{1}{C}Ae^{Cx} + \frac{1}{C}(A+B)e^{-Cx} + Bx + D \quad (6.9)$$

Les coefficients A, B, C et D sont calculés pour chaque colonne afin de minimiser l'écart quadratique avec les valeurs expérimentales. Les fonctions de Matlab (*lsq-nonlin*) basées sur les moindres carrés sont utilisées afin de résoudre ce problème non linéaire. Ces méthodes sont basées sur une variante de la méthode de Newton [18]. D'autres fonctions de lissage ont aussi été testées, telles que des fonctions polynômiales. Elles donnent un écart-type plus important avec les valeurs expérimentales, ce qui justifie le choix de l'Equation (6.9). Le champ de déformations ε_{xx}^p (Equation (6.10)) s'obtient en dérivant l'Equation (6.9) pour chaque colonne de l'image. Le champ de contraintes σ_{xx}^p s'obtient en utilisant les lois de comportement (Equation (6.11)) où l'effet de Poisson a été négligé. Cette dernière hypothèse se justifie par le fait que seuls des essais de traction unidirectionnels sont réalisés sur des composites dont les fibres sont orientées à 0 et 90 degrés. Cette hypothèse entraîne une erreur sur le calcul des contraintes inférieure à 2% dans notre cas, ce que l'on peut vérifier facilement avec quelques calculs analytiques simples. L'avantage d'une telle simplification est de permettre un traitement des images et des calculs indépendants, ce qui deviendrait très vite fastidieux si cette hypothèse n'était pas utilisée (calage des champs de déformations, propagation des erreurs...). On obtient donc :

$$\varepsilon_{xx}^p(x) = \frac{du_{x,lisse}^p}{dx}(x) = Ae^{Cx} - (A+B)e^{-Cx} + B \quad (6.10)$$

La loi de comportement s'écrit dans notre cas :

$$\sigma_{xx}^p(x) = E_x \varepsilon_{xx}^p(x) \quad (6.11)$$

Une longueur de transfert longitudinale $L_{tx}(y)$ est définie pour chaque colonne de l'image :

$$L_{tx}(y) = \frac{3}{\sqrt{C}} \quad (6.12)$$

Elle correspond à la longueur nécessaire pour que la contrainte longitudinale $\sigma_{xx}^p(x)$ dans le patch atteigne 95% de la contrainte longitudinale limite atteinte dans le patch loin des bords libres. Une procédure similaire est appliquée pour chaque ligne $x = cste$ du champ de déplacements transversal u_y^p . Les équations obtenues pour la direction transversale sont donc dans ce cas :

$$u_{y,lisse}^p(y) = \frac{1}{C'} A' e^{C'y} + \frac{1}{C'} (A' + B') e^{-C'y} + B'y + D' \quad (6.13)$$

La déformation transversale $\varepsilon_{yy}^p(y)$ dans le patch est calculée en dérivant le déplacement transversal $u_{y,lisse}^p(y)$ dans le patch :

$$\varepsilon_{yy}^p(y) = \frac{du_{y,lisse}^p}{dy}(y) = A' e^{C'y} - (A' + B') e^{-C'y} + B' \quad (6.14)$$

La loi de comportement s'écrit :

$$\sigma_{yy}^p(y) = E_y \varepsilon_{yy}^p(y) \quad (6.15)$$

Une longueur de transfert transversale $L_{ty}(x)$ est définie pour chaque colonne de l'image :

$$L_{ty}(x) = \frac{3}{\sqrt{C'}} \quad (6.16)$$

6.5 Patches rectangulaires

Des tests de tractions sont conduits sur des éprouvettes renforcées par des patches rectangulaires. Conformément aux calculs précédents, des patches à 0 et 90 degrés sont utilisés. La zone observée par la caméra dépend de l'orientation des fibres (voir Figure 6.5).

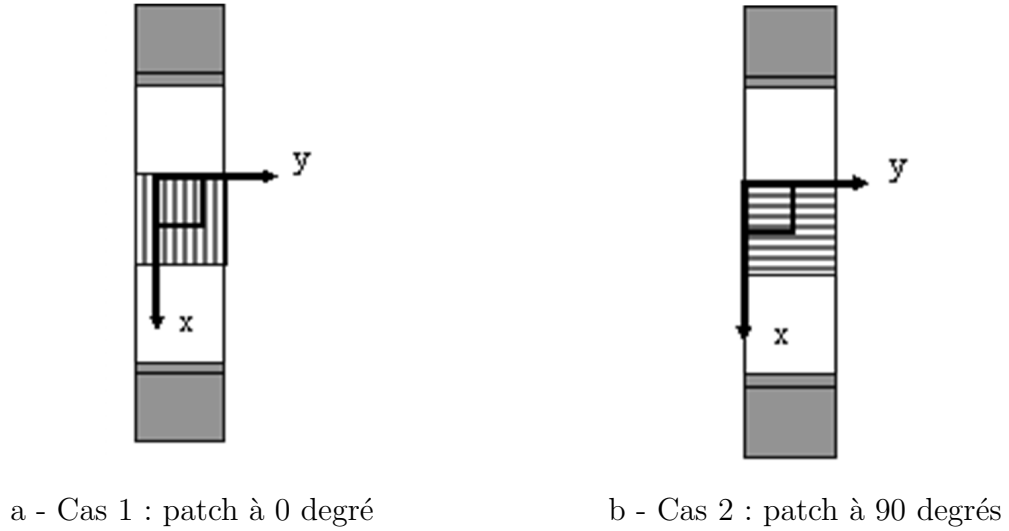


FIG. 6.5 – Zones observées par la caméra.

Ces essais ont pour but de mettre en lumière des phénomènes bidimensionnels et d'observer d'éventuels écarts avec les modèles analytique et semi-numérique présentés dans la partie 3. Une trentaine d'essais est effectuée sur chaque éprouvette, en démontant et remontant l'éprouvette pour assurer la répétabilité des phénomènes observés. De façon générale, les essais sont bien reproductibles, avec des écarts sur le déplacement qui n'excède pas quelques microns. De plus, un comparateur est utilisé pour évaluer la présence d'un quelconque mouvement hors-plan.

6.5.1 Patch à 0 degré

Cet essai a permis d'appliquer la méthode de la grille dans le cas de structures renforcées par patches composites. L'orientation des fibres est égale à 0 degré. Les caractéristiques matérielles et géométriques des éprouvettes sont celles décrites dans le paragraphe 6.2. Le but ici est de mettre en avant la zone de transfert d'effort. Le déplacement imposé conduit à un effort de 18 kN, ce qui donne une contrainte égale à 64 MPa dans le substrat. Seul un essai représentatif est ici traité.

6.5.1.1 Champ de déplacements longitudinal u_x^p

Un glissement de l'ordre de 0,1 mm a été observé lors de l'essai. Le comparateur ne détecte pas de mouvement hors-plan. La Figure 6.6a représente le champ de déplacements longitudinal u_x^p après filtrage. Par souci de simplicité, l'origine de l'axe des déplacements est choisie de telle sorte qu'elle soit placée au bord libre $x = 0$. Deux zones sont visibles sur le champ de déplacements. Loin du bord libre du patch composite ($x > 10$ mm), le champ de déplacements u_x^p est quasi linéaire suivant la direction x . Près du bord libre $x = 0$, l'évolution du champ de déplacements est

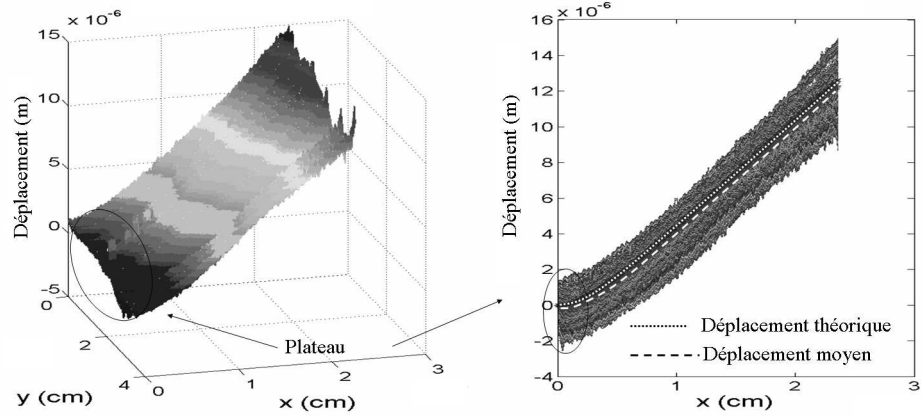
fortement non linéaire et correspond au « plateau » de déplacements de la Figure 6.6a. La Figure 6.6b compare le champ de déplacements expérimental avec la courbe théorique donnée par l'Equation (1.9), où l'origine des déplacements correspond au bord libre du patch composite. La moyenne du champ de déplacements pour chaque ligne de l'image est aussi représentée sur cette figure. La variation maximale du champ expérimental autour de cette moyenne expérimentale est de l'ordre de 3,4 μm . Les évolutions théorique et expérimentale moyenne du champ de déplacements sont quasi identiques : le plus grand écart entre les deux évolutions est inférieur à 0,4 μm . La Figure 6.7 présente un exemple de lissage pour $y = cste$. L'écart-type entre les évolutions expérimentale et lissée est de l'ordre de 0,55 μm , ce qui peut être considéré comme un bon indicateur de qualité de lissage pour la fonction choisie, ceci pour un déplacement maximal de 15 μm .

6.5.1.2 Champ de contraintes longitudinal dans le composite σ_{xx}^p

La Figure 6.6c présente l'évolution de la contrainte longitudinale σ_{xx}^p calculée dans le patch composite grâce à l'Equation (6.11). Une zone de transfert d'effort de l'ordre de 1 cm est clairement visible : les contraintes sont nulles sur le bord libre et atteignent une valeur limite loin de ce dernier. La Figure 6.6d compare le champ obtenu à partir des données expérimentales au champ théorique déduit de l'Equation (1.5). La moyenne du champ expérimental sur chaque ligne est aussi reportée. Les deux courbes sont en accord et sont quasi identiques.

6.5.1.3 Champ de cisaillement longitudinal dans la colle σ_{xz}^a

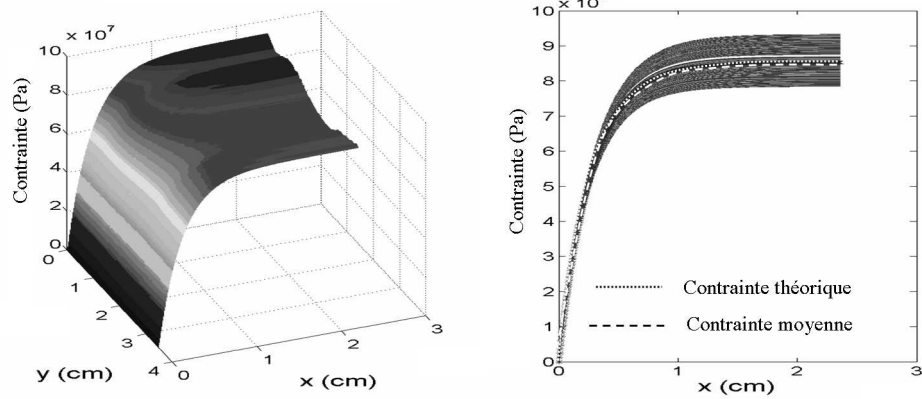
Le champ de contraintes dans la colle peut être calculé à partir du champ de contraintes longitudinal dans le patch composite en utilisant l'Equation (6.10). La Figure 6.6e présente l'évolution de la contrainte de cisaillement calculée σ_{xz}^a en fonction de x et de y . Le cisaillement est maximal au bord libre $x = 0$ et ne dépend pas de la direction y . La capacité à évaluer cette contrainte de cisaillement est importante : dans la plupart des cas, ce pic de cisaillement est à l'origine de la défaillance du renforcement [21]. La Figure 6.6f compare le champ de cisaillement obtenu à partir des données expérimentales à la courbe théorique donnée par l'Equation (1.8). La moyenne du champ expérimental pour chaque ligne de l'image est aussi reportée sur la figure. Le plus grand écart autour de cette valeur moyenne est égale à 1 MPa. De plus, les évolutions théorique et moyenne sont pratiquement identiques. Dans ce cas-là, un modèle unidimensionnel classique est suffisant pour décrire la réponse longitudinale.



a - Vue 3D

b - Vue de côté

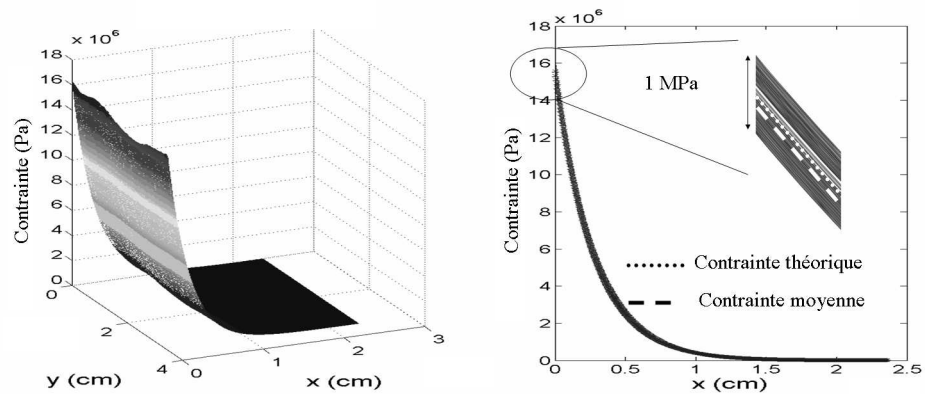
Champ de déplacements longitudinal u_x^p



c - Vue 3D

d - Vue de côté

Champ de contraintes longitudinal σ_{xx}^p



e - Vue 3D

f - Vue de côté

Champ de cisaillement longitudinal σ_{xz}^a dans la colle

FIG. 6.6 – Résultats expérimentaux d'un patch rectangulaire dont les fibres sont orientées à 0 degré.

La Figure 6.8 présente l'évolution de la longueur de transfert longitudinale $L_{tx}(y)$ suivant la largeur. L'évolution expérimentale est pratiquement égale à la longueur de transfert théorique (8,4 mm) calculée à partir des données fournies par l'AIA. De plus, l'évolution expérimentale de la longueur de transfert est à peu près constante suivant la direction y . Les résultats obtenus lors d'un deuxième essai sont aussi montrés. Ce deuxième essai correspond à la même éprouvette démontée puis remontée. On note la cohérence des résultats obtenus d'un essai à l'autre.

Le Tableau 6.1 représente les contraintes maximales de chaque matériau ainsi que les valeurs de critère de rupture de chaque matériau ramenées en pourcentage pour pouvoir comparer les défaillances. Le rapport maximal est obtenu pour la colle et est égal à 16%. Cela signifie que la défaillance du renforcement serait causée par la défaillance de la colle.

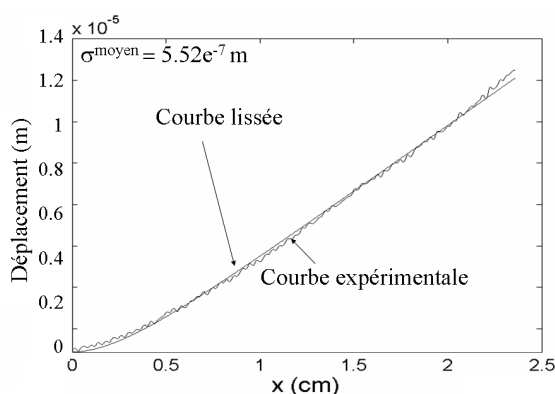


FIG. 6.7 – Exemple de lissage pour $y = cste$.

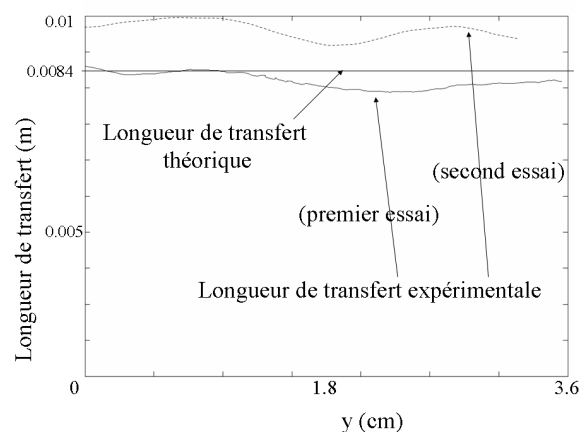


FIG. 6.8 – Evolutions de $L_{tx}(y)$.

| | Composite | Aluminium | Colle |
|-----------------------------|-----------|-----------|-----------|
| Résistances (MPa) | 1786 | 440 | 40 |
| Contraintes maximales (MPa) | 83 | 65 | 16 |
| Rapport r (%) | -3 | 2 | 16 |

TAB. 6.1 – Rapports des contraintes maximales avec les résistances de chacun des matériaux dans le cas d'un patch rectangulaire à 0 degré.

6.5.2 Patch à 90 degrés

Il faut souligner d'emblée que la différence des coefficients de Poisson entre le patch composite et le substrat est très importante dans ce cas là : 0,32 pour l'alumi-

niun et 0,02 pour le composite. Le but ici est de mettre en avant expérimentalement une éventuelle zone de transfert d'effort dans la direction transversale due à l'effet de Poisson. Dans ce paragraphe, l'origine des axes x et y correspond à l'un des quatre coins du patch composite (voir Figure 6.5b). Le déplacement imposé conduit à un effort de 18 kN, ce qui donne une contrainte égale à 64 MPa dans l'éprouvette.

6.5.2.1 Champ de déplacements longitudinal u_x^p

Un glissement de l'ordre de 0,1 mm a été observé lors de l'essai. Le comparateur ne détecte pas de mouvement hors-plan. La Figure 6.9a montre le champ de déplacements longitudinal u_x^p après filtrage. L'origine de l'axe des déplacements est choisie de telle manière que la moyenne du champ de déplacements, le long de l'axe y , soit égale à 0 au bord libre $x = 0$. Deux zones peuvent être distinguées dans ce champ de déplacements. La première zone présente une évolution quasi linéaire du champ de déplacements loin du bord libre, pour $x > 5$ mm. La deuxième zone présente un très petit plateau près du bord libre $x = 0$. Ce plateau est beaucoup plus petit que le plateau observé dans le cas d'un patch à 0 degré. Ceci est dû au fait que la longueur de transfert (2,7 mm) est plus petite que la longueur de transfert obtenue dans le cas d'un patch composite à 0 degré (8,4 mm). La Figure 6.9b compare le champ expérimental avec l'évolution théorique calculée à partir des données fournies par l'AIA. La moyenne du champ de déplacements expérimental le long de chaque ligne de l'image est aussi reportée sur la figure : les variations maximales autour de cette moyenne sont égales à 10 μm . Il est à noter que ces variations maximales correspondent à très peu de colonnes. En effet, l'écart moyen se situe autour de 5 μm . Les déplacements théoriques et moyennés sont pratiquement similaires (la différence est inférieure à 0,4 μm). L'écart-type entre les champs expérimental et lissé est égal à 0,17 μm pour un déplacement maximal de 35 μm .

6.5.2.2 Champ de contraintes longitudinal dans le composite σ_{xx}^p

La Figure 6.9c présente l'évolution de la contrainte longitudinale σ_{xx}^p calculée dans le composite en fonction de x et y à partir de l'Equation (6.11). Une zone de transfert d'effort, de l'ordre de 0,2 cm, peut être clairement observée. La Figure 6.9d compare le champ de contraintes obtenu à partir des données expérimentales avec la courbe théorique déduite à partir des données fournies par l'AIA. La différence entre les contraintes limites théorique et expérimentale est de l'ordre de 8,8%.

6.5.2.3 Champ de cisaillement longitudinal dans la colle σ_{xz}^a

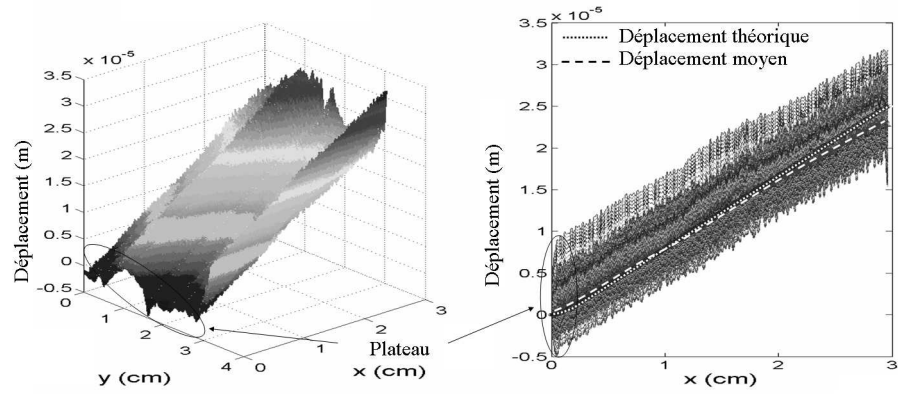
La contrainte de cisaillement dans la colle σ_{xz}^a est calculée à partir du champ de contraintes dans le composite grâce à l'Equation (1.7). La Figure 6.9e présente

l'évolution de la contrainte de cisaillement σ_{xz}^a en fonction des directions x et y . La contrainte de cisaillement est maximale pour $x = 0$. Elle est quasiment constante selon la direction y . La Figure 6.9f compare le champ de cisaillement obtenu à partir des données expérimentales à la courbe théorique donnée par l'Equation (1.8). La moyenne du champ expérimental pour chaque ligne de l'image est aussi reportée sur la figure. Les variations maximales autour de la contrainte de cisaillement moyenne sont inférieures à 0,2 MPa.

La Figure 6.10 présente l'évolution de la longueur de transfert $L_{tx}(y)$. L'évolution expérimentale est pratiquement égale à la longueur de transfert théorique (2,7 mm). De plus, l'évolution expérimentale de la longueur de transfert est quasi constante, ce qui veut dire qu'elle peut être décrite par une analyse unidimensionnelle classique.

6.5.2.4 Champ de déplacements transversal u_y^p

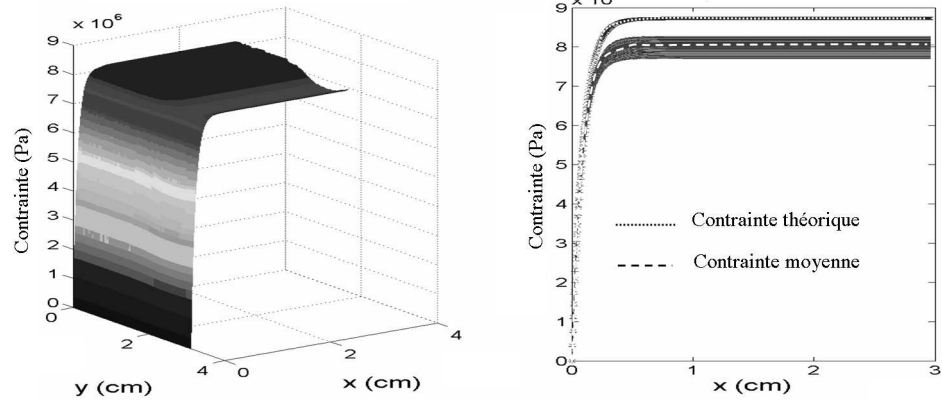
La Figure 6.11 montre le champ de déplacements transversal du composite u_y^p , où le pixel (0,0) correspond au coin du patch (voir Figure 6.5). Les déplacements observés sont dus à l'effet de Poisson de l'aluminium. En effet, le coefficient de Poisson du patch composite est très faible (0,02) dans ce cas-là, entraînant de ce fait un champ de déplacements quasi nul dû au champ de déplacements longitudinal u_x^p . La vue de côté représente le champ de déplacements expérimental, le déplacement théorique ainsi que le déplacement moyen expérimental suivant y . Les déplacements moyen et théorique montrent quelques différences, ce qui peut s'expliquer par le fait que l'analyse unidimensionnelle n'est pas suffisante pour quantifier le champ de déplacements dans ce cas. La vue de côté montre une variation autour du déplacement moyen de 2 μm . L'écart-type entre les évolutions théorique et lissée est de 0,27 μm pour un déplacement maximal de 10 μm .



a - Vue 3D

b - Vue de côté

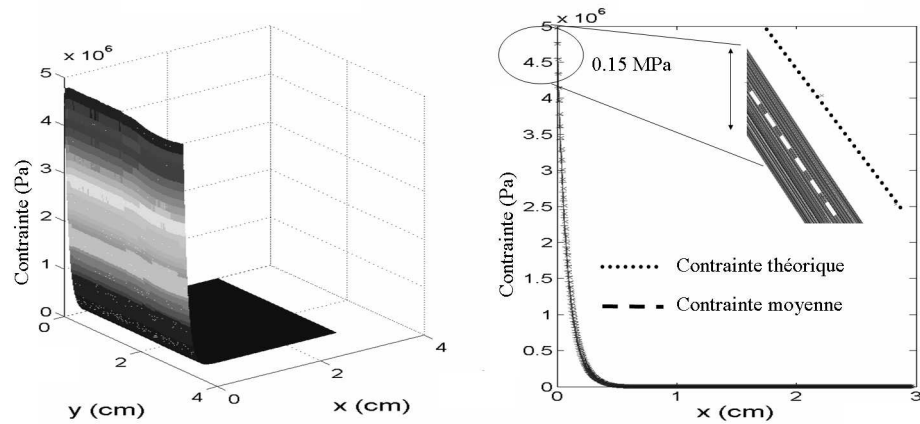
Champ de déplacements longitudinal u_x^p



c - Vue 3D

d - Vue de côté

Champ de contraintes longitudinal σ_{xx}^p dans le composite



e - Vue 3D

f - Vue de côté

Champ de cisaillement longitudinal σ_{xz}^a dans la colle

FIG. 6.9 – Résultats expérimentaux d'un patch rectangulaire dont les fibres sont orientées à 90 degrés.

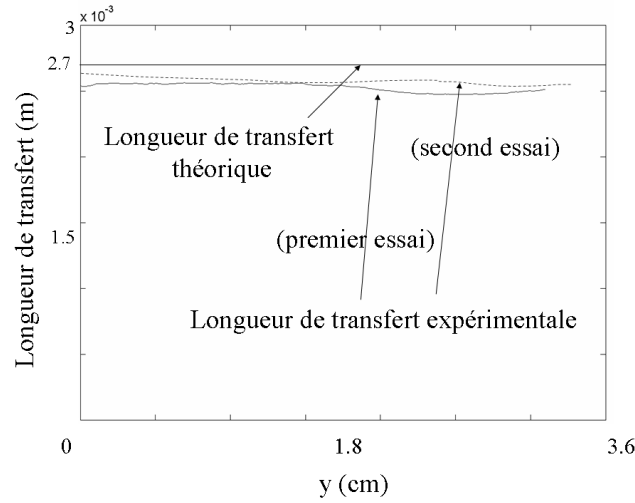


FIG. 6.10 – Evolutions théorique et expérimentales de la longueur de transfert longitudinale $L_{tx}(y)$ dans le cas d'un essai à 90 degrés.

6.5.2.5 Champ de contraintes transversal dans le composite σ_{yy}^p

Le champ de contraintes transversal σ_{yy}^p dans le composite est tracé sur la Figure 6.12. La distribution des contraintes transversales σ_{yy}^p dans le composite est clairement bidimensionnelle : elle dépend à la fois des directions x et y . Deux phénomènes peuvent être clairement distingués :

- un transfert d'effort transversal apparaît dans la direction y du fait de la différence des coefficients de Poisson ;
- une seconde zone de transfert apparaît suivant la direction x . Cette zone de transfert dépend à la fois des directions x et y . Elle est liée au transfert d'effort longitudinal. En effet, la contrainte longitudinale σ_{xx}^s est plus importante au bord libre $x = 0$ car le composite ne renforce pas le substrat à cet endroit. Cette contrainte longitudinale plus importante entraîne une contrainte transversale σ_{yy}^s plus importante au bord libre $x = 0$. La contrainte transversale σ_{yy}^p dans le composite est donc plus importante au bord libre $x = 0$. Loin de ce bord libre, la contrainte longitudinale σ_{xx}^s dans le substrat diminue, diminuant ainsi la contrainte transversale σ_{yy}^s , qui diminue elle-même la contrainte transversale σ_{yy}^p dans le composite.

Il est intéressant de comparer les résultats calculés par différences finies et ceux calculés à partir des mesures. Deux analyses peuvent être conduites. La première est qualitative : les résultats obtenus à partir des données expérimentales et numériques montrent l'apparition de deux zones de transfert d'effort dues à la différence des coefficients de Poisson entre le patch composite et l'aluminium. La deuxième analyse est quantitative : les niveaux de contraintes diffèrent de 50% environ entre le champ

de contraintes calculé à partir des mesures et celui calculé par différences finies. Cette différence peut s'expliquer notamment par les incertitudes sur les données matérielles et notamment sur les valeurs des coefficients de Poisson du composite et de la colle, et du module d'Young transversal E_y du composite. De plus, la dérivation des champs obtenus expérimentalement a tendance à amplifier les différences. Enfin, une dernière explication concerne les conditions aux limites qui diffèrent entre les calculs menés et les essais effectués. En effet, expérimentalement, les mors empêchent l'effet de Poisson, ce qui provoquent des distributions transversales des contraintes différentes entre les résultats expérimentaux et les résultats numériques.

6.5.2.6 Champ de cisaillement transversal dans la colle σ_{yz}^a

La contrainte de cisaillement σ_{yz}^a dans la colle est calculée à partir du champ de contraintes transversal dans le composite. La Figure 6.13 représente l'évolution de la contrainte de cisaillement σ_{yz}^a en fonction de x et de y . La contrainte de cisaillement σ_{yz}^a dépend à la fois des directions x et y . Elle est maximale pour $x = 0$ et $y = 0$, ce qui correspond au coin du patch. Deux analyses peuvent être conduites sur la comparaison des champs calculés numériquement et à partir des mesures. Ces analyses sont similaires à celles faites pour la distribution des contraintes transversales σ_{yy}^p dans le patch. La première est qualitative : les deux champs calculés font apparaître un pic de cisaillement pour $x = 0$ et $y = 0$. Ce pic est dû aux deux zones de transfert d'effort transversales. La deuxième analyse est quant à elle quantitative du fait de la différence des niveaux de contraintes. Cette différence peut s'expliquer notamment par les incertitudes sur les données matérielles et par les conditions aux limites qui sont différentes dans les deux cas.

La Figure 6.14 présente l'évolution de la longueur de transfert transversale en fonction de la direction x . L'évolution expérimentale n'est pas rigoureusement égale à la longueur de transfert théorique (8,4 mm) obtenue dans le cadre d'une analyse unidimensionnelle classique. En effet, la longueur de transfert transversale dépend à la fois de la direction x et de la direction y . Les essais montrent qu'elle est plus grande au bord libre $x = 0$ que celle située loin de ce dernier. L'évolution expérimentale ne peut donc pas être décrite correctement avec une approche unidimensionnelle. Cette évolution expérimentale est en fait le résultat d'un couplage entre les deux directions du problème.

Le Tableau 6.2 représente les contraintes maximales de chaque matériau ainsi que les valeurs des critères de rupture de chaque matériau ramenées en pourcentage pour pouvoir comparer les défaillances. Le rapport le plus important est obtenu pour le composite. En effet, sa faible résistance dans la direction transversale des fibres, combinée à sa résistance moins importante en compression, a pour conséquence de

produire sa défaillance.

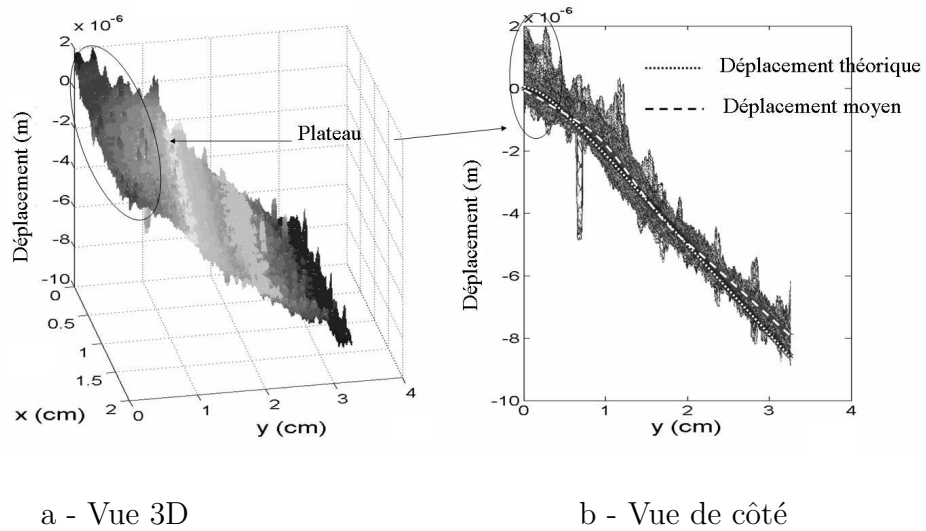


FIG. 6.11 – Champ de déplacements transversal u_y^p dans le composite.

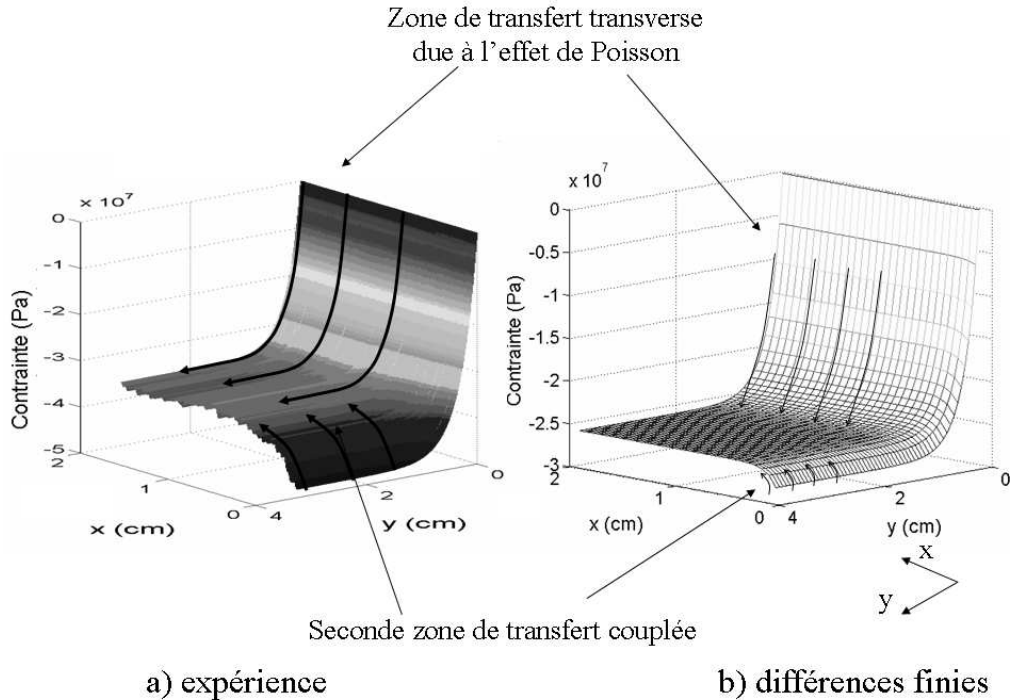


FIG. 6.12 – Champ de contraintes transversal σ_{yy}^p dans le composite dans le cas d'un essai à 90 degrés.

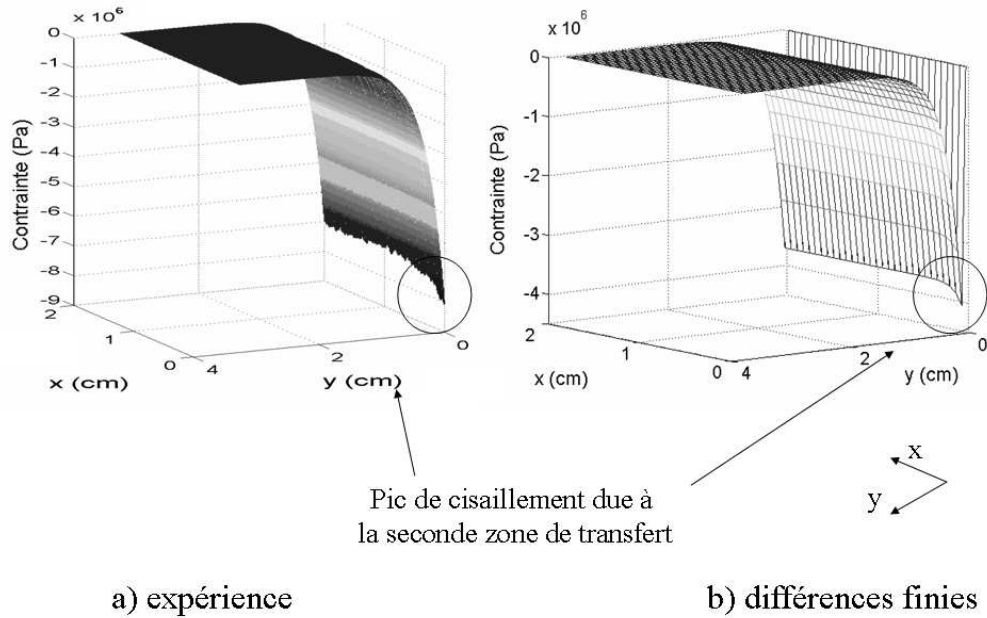


FIG. 6.13 – Champ de cisaillement transversal σ_{yz}^a dans la colle dans le cas d'un essai avec un patch dont les fibres sont orientées à 90 degrés.

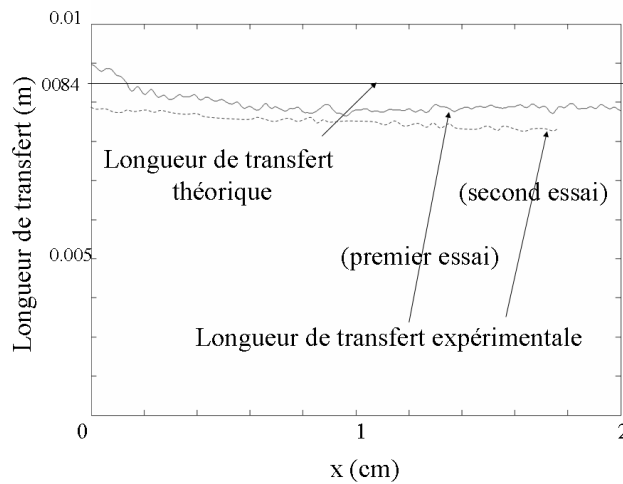


FIG. 6.14 – Evolutions théorique et expérimentales de la longueur de transfert transversale $L_{ty}(x)$ dans le cas d'un essai à 90 degrés.

| | Composite | Aluminium | Colle |
|-----------------------------|-----------|-----------|-------|
| Direction longitudinale | | | |
| Résistances (MPa) | 42 | 440 | 40 |
| Contraintes maximales (MPa) | 8 | 65 | 4,8 |
| Direction transversale | | | |
| Résistances (MPa) | 1000 | 440 | 40 |
| Contraintes maximales (MPa) | 45 | 11,3 | 8 |
| Rapport r (%) | 17 | 2 | 5 |

TAB. 6.2 – Rapports des contraintes maximales avec les résistances de chacun des matériaux dans le cas d'un patch rectangulaire à 90 degrés.

6.5.3 Conclusion

Ces essais sur des patches rectangulaires permettent de faire les conclusions suivantes :

- dans le cas d'un patch dont les fibres sont orientées à 0 degré, les résultats expérimentaux sont en concordance avec les résultats prédits avec des solutions unidimensionnelles classiques ;
- dans le cas d'un patch dont les fibres sont orientées à 90 degrés, le champ de déplacements longitudinal peut être prédit avec une analyse unidimensionnelle. Par contre, le champ de déplacements transversal ne peut pas être prédit avec une analyse unidimensionnelle. En effet, la différence des coefficients de Poisson entre le patch composite (0,02) et le substrat (0,32) entraîne deux zones de transfert d'effort transversales qui sont couplées avec la zone de transfert longitudinale ;
- la défaillance prévue pour le renfort n'est pas seulement due à la colle. En effet, dans le cas d'un patch dont les fibres sont orientées à 90 degrés, la défaillance du renfort provient de la rupture du composite ;
- le programme par différences finies permet d'évaluer qualitativement les distributions des contraintes transversales dans le cas d'un patch à 90 degrés.

6.6 Patches circulaires

Des tests de tractions sont conduits sur des éprouvettes renforcées par des patches circulaires. Ces essais sont effectués sur des éprouvettes équilibrées afin d'amoin- drir un quelconque mouvement hors-plan. Les patches sont constitués de composite unidirectionnel dont les fibres sont orientées à 0 et 90 degrés. Les caractéristiques

matérielles et géométriques des éprouvettes sont celles décrites dans le paragraphe 6.2. Ces essais ont pour but de mettre en lumière des phénomènes bidimensionnels et de mettre en avant l'influence de la géométrie sur les distributions des contraintes dans le patch et dans la colle. Une trentaine d'essais ont été effectués sur chaque éprouvette, en démontant et remontant l'éprouvette, ainsi qu'en retournant cette dernière. Seuls les essais les plus représentatifs sont présentés.

6.6.1 Patch à 0 degré

Deux patches composites sont collés symétriquement de part et d'autre de l'éprouvette. L'orientation des fibres est ici égale à 0 degré. Le but est de mettre en avant la zone de transfert d'effort et d'étudier l'influence de la géométrie. Le déplacement imposé conduit à un effort de 10 kN, ce qui donne une contrainte égale à 35 MPa dans le substrat.

6.6.1.1 Champ de déplacements longitudinal u_x^p

La Figure 6.15 représente le champ de déplacements longitudinal u_x^p après filtrage. Par souci de simplicité, l'origine de l'axe des déplacements est choisie de telle sorte qu'elle soit égale à zéro au bord libre $x = 0$. Deux zones peuvent être distinguées. Loin du bord libre du patch composite ($x > 10$ mm), le champ de déplacements u_x^p est quasi linéaire suivant la direction x . Près du bord libre $x = 0$, l'évolution du champ de déplacements est fortement non linéaire et correspond au « plateau » de déplacements de la Figure 6.15. La Figure 6.15b permet de voir les fluctuations du champ de déplacements suivant la direction y . Le déplacement dans le composite est légèrement plus important au point A. Il est à peu près constant à x donné loin du bord libre. Cette différence entraîne une déformation plus importante sur les bords du patch composite. Pour évaluer cette différence, le champ de contraintes longitudinal dans le composite est calculé ci-après.

6.6.1.2 Champ de contraintes longitudinal dans le composite σ_{xx}^p

La Figure 6.16a présente l'évolution de la contrainte longitudinale σ_{xx}^p calculée dans la patch composite à partir des Equations (6.10) et (6.11). Une zone de transfert d'effort de l'ordre de 1 cm est clairement visible : les contraintes sont égales à 0 sur le bord libre puis convergent vers une valeur limite loin de ce dernier. La Figure 6.16b représente différentes coupes du champ de contraintes pour plusieurs valeurs de x . La distribution de ces contraintes n'est pas la même selon que la coupe se trouve ou non à proximité du bord libre. En effet, pour des faibles valeurs de x (soit près du point extrême A), la distribution suivant y représente un arc de cercle, alors que pour

des valeurs élevées de x , cette même distribution est quasi linéaire. Cela s'explique par le fait que le transfert d'effort ne s'effectue pas de la même façon partout dans le composite pour une ordonnée y fixée, à cause de la géométrie circulaire du patch composite. Les contraintes calculées par le programme par différences finies sont aussi représentées sur la Figure 6.16b. Elles donnent une bonne évaluation de la distribution de σ_{xx}^p dans le composite.

6.6.1.3 Champ de cisaillement longitudinal dans la colle σ_{xz}^a

Le champ de contraintes dans la colle σ_{xz}^a peut être calculé à partir du champ de contraintes longitudinal dans le patch composite en utilisant l'Equation (6.10). La Figure 6.17a présente l'évolution de la contrainte de cisaillement σ_{xz}^a en fonction de x et de y . Le cisaillement est maximal sur les bords libres et dépend des directions x et y . La Figure 6.17b représente différentes coupes du champ de contraintes pour des abscisses x fixées. Pour des faibles valeurs de x , la distribution suivant y représente un arc de cercle, alors que pour des valeurs élevées de x , cette même distribution est quasi linéaire. La contrainte maximale de cisaillement est aussi représentée sur la Figure 6.17b. Cette contrainte maximale est à peu près constante suivant la direction y .

Les contraintes calculées par le programme par différences finies sont aussi représentées sur la Figure 6.17b. Elles sont légèrement inférieures aux contraintes calculées à partir des mesures expérimentales. Cela est notamment dû au pas de différences finies utilisé. Cependant, le programme par différences finies donne une bonne approximation de la distribution de σ_{xz}^a dans la colle.

Le Tableau 6.3 représente les contraintes maximales de chaque matériau ainsi que les valeurs de critère de rupture de chaque matériau. Le rapport maximal est obtenu pour la colle. Il est égal à 9%. Dans ce cas là, la défaillance du renforcement serait causée par la défaillance de la colle.

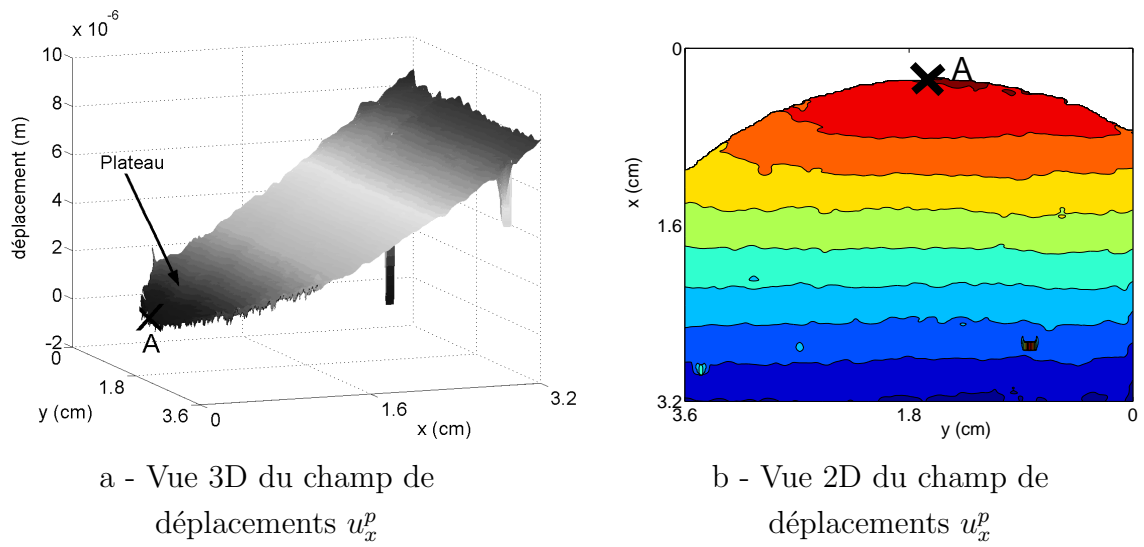


FIG. 6.15 – Champ de déplacements u_x^p dans le composite dans le cas où les fibres sont orientées à 0 degré.

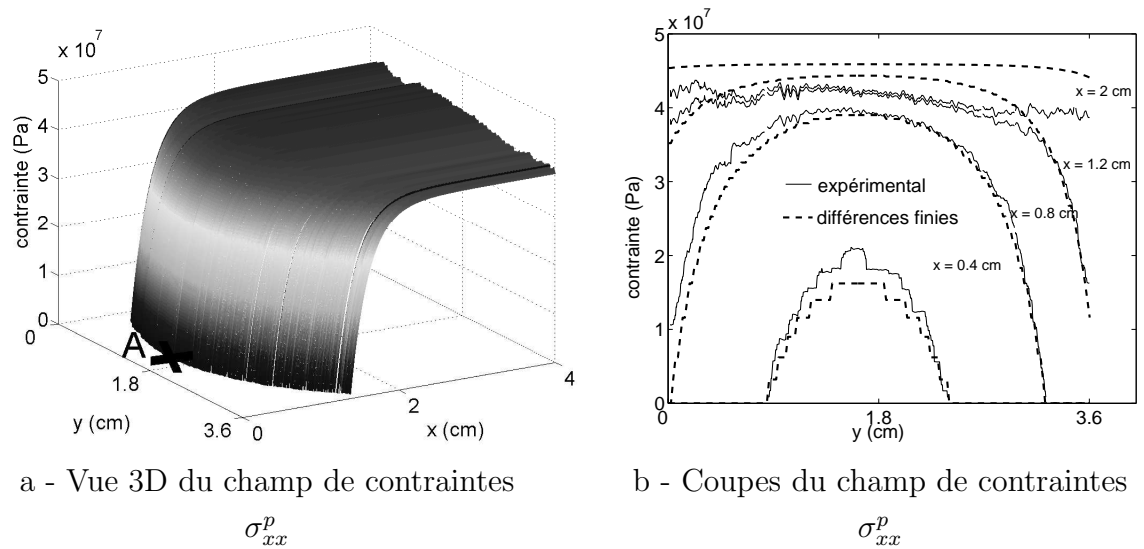


FIG. 6.16 – Champ de contraintes σ_{xx}^p dans le composite dans le cas d'un essai à 0 degré.

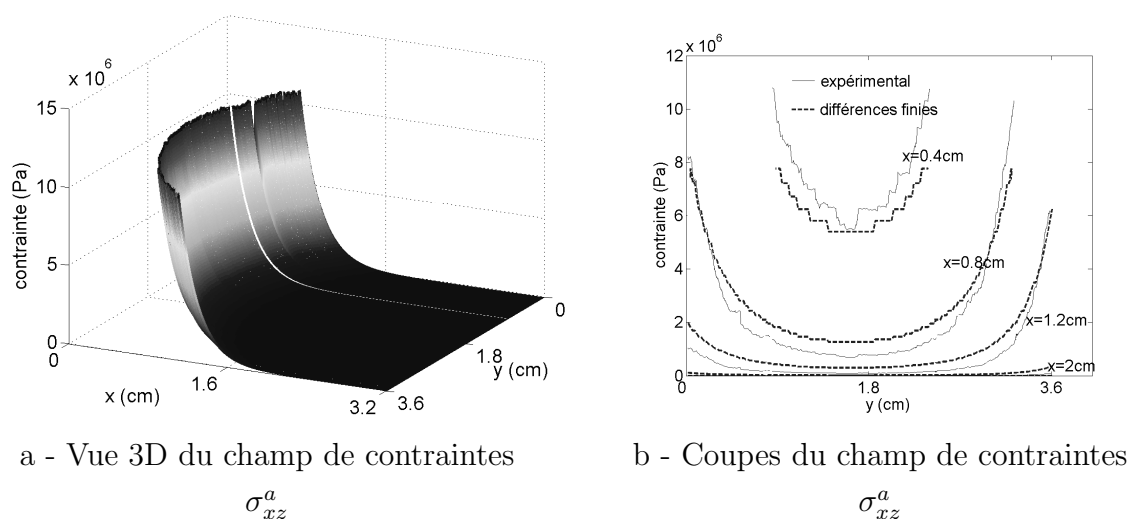


FIG. 6.17 – Champ de contraintes σ_{xz}^a dans la colle dans le cas d'un essai à 0 degré.

| | Composite | Aluminium | Colle |
|-----------------------------|-----------|-----------|----------|
| Résistances (MPa) | 1786 | 440 | 40 |
| Contraintes maximales (MPa) | 44 | 38 | 12 |
| Rapport r (%) | -2 | 0,75 | 9 |

TAB. 6.3 – Rapports des contraintes maximales avec les résistances de chacun des matériaux dans le cas d'un patch circulaire à 0 degré.

6.6.2 Patch à 90 degrés

L'orientation des fibres du patch unidirectionnel est ici égale à 90 degrés. Le but est de mettre en avant la zone de transfert d'effort transversale due à la différence des coefficients de Poisson. Le déplacement imposé conduit à un effort de 10 kN, ce qui donne une contrainte égale à 35 MPa dans le substrat.

6.6.2.1 Champ de déplacements longitudinal u_x^p

La Figure 6.18 représente le champ de déplacements longitudinal u_x^p après filtrage. Par soucis de simplicité, l'origine de l'axe des déplacements est choisie de telle sorte à ce que ce déplacement soit égal à zéro au bord libre $x = 0$. Deux zones peuvent être distinguées. Loin du bord libre du patch composite ($x > 5$ mm), le champ de déplacements u_x^p est quasi linéaire suivant la direction x . Près du bord libre $x = 0$, l'évolution du champ de déplacements est fortement non linéaire et correspond au « plateau » de déplacements de la Figure 6.18. Ce plateau est plus petit que dans

le cas précédent où les fibres étaient orientées à 0 degré (voir Figure 6.15). En effet, la rigidité E_y du composite est beaucoup plus faible que la rigidité E_x . La Figure 6.18b permet de voir les fluctuations du champ de déplacements suivant la direction y . Le déplacement dans le composite est légèrement plus important au centre du bord supérieur du composite. Il est à peu près identique loin du bord libre pour un x donné. Cette différence entraîne une déformation plus importante sur les bords du patch composite. Le champ de contraintes longitudinal dans le composite est maintenant calculé afin d'évaluer cette différence.

6.6.2.2 Champ de contraintes longitudinal dans le composite σ_{xx}^p

La Figure 6.19a présente l'évolution de la contrainte longitudinale σ_{xx}^p calculée dans le patch composite grâce aux Equations (6.10) et (6.11). Une zone de transfert d'effort de l'ordre de 0,5 cm est clairement visible : les contraintes sont égales à 0 au bord libre et tendent vers une valeur limite loin de ce dernier. La Figure 6.19b représente différentes coupes du champ de contraintes pour différentes valeurs d'ordonnée. La distribution de ces contraintes n'est pas la même, selon que la coupe se trouve ou non à proximité du bord libre. En effet, pour des faibles valeurs de x , la distribution suivant y représente un arc de cercle, alors que pour des valeurs élevées de x , cette même distribution est quasi linéaire. Cela s'explique par le fait que le transfert d'effort n'est pas le même partout pour une abscisse x fixée, ce qui est dû à la géométrie circulaire du patch composite. De plus, la contrainte longitudinale est légèrement plus faible au centre du patch composite que sur les bords $y = 0$ cm et $y = 4$ cm. Les contraintes calculées par différences finies sont aussi représentées sur la Figure 6.19b. Les évolutions numérique et issue des essais sont quasi similaires.

6.6.2.3 Champ de cisaillement longitudinal dans la colle σ_{xz}^a

Le champ de contraintes dans la colle σ_{xz}^a peut être calculé à partir du champ de contraintes longitudinal dans le patch composite en utilisant l'Equation (6.10). La Figure 6.20a représente l'évolution de la contrainte de cisaillement calculée σ_{xz}^a en fonction de x et de y . Le cisaillement est maximal sur les bords libres et dépend des direction x et y . La Figure 6.20b représente différentes coupes du champ de contraintes pour plusieurs valeurs d'abscisses. Pour des faibles valeurs de x , la distribution suivant y représente un arc de cercle, alors que pour des valeurs élevées de x , cette même distribution est quasi linéaire. La contrainte maximale de cisaillement est aussi représentée sur la Figure 6.20b pour $x = 2,4$ cm. Cette contrainte maximale est à peu près constante suivant la direction y . Cependant, elle est légèrement inférieure au centre du patch composite. Les contraintes calculées par différences finies sont inférieures aux contraintes calculées à partir des mesures expérimentales, ce

qui est dû notamment au pas de différences finies utilisé. Malgré cela, le programme par différences finies donne une bonne approximation de la distribution de σ_{xz}^a dans la colle.

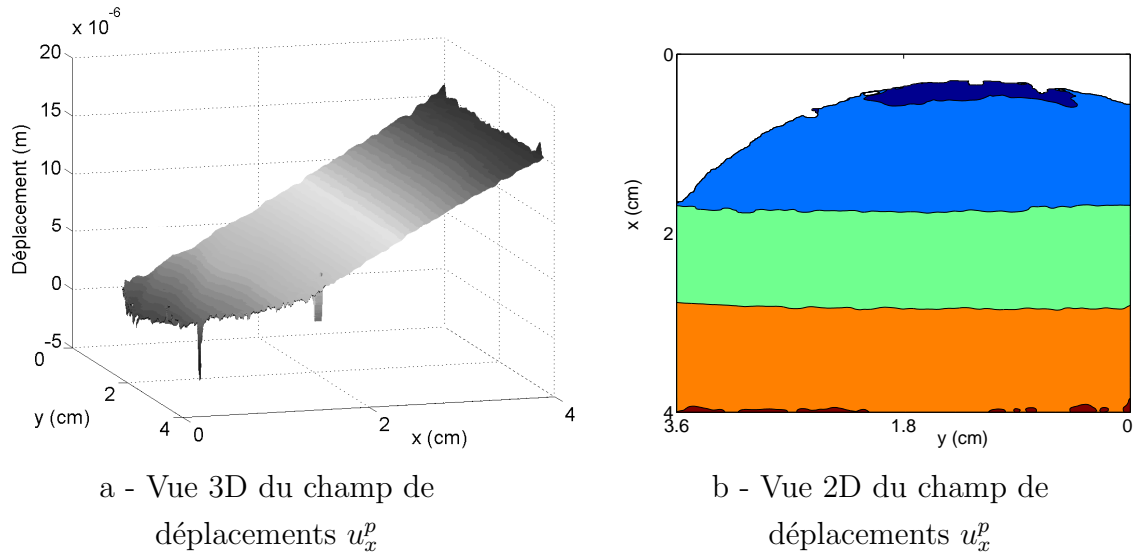


FIG. 6.18 – Champ de déplacements u_x^p dans le composite dans le cas d'un essai à 90 degrés.

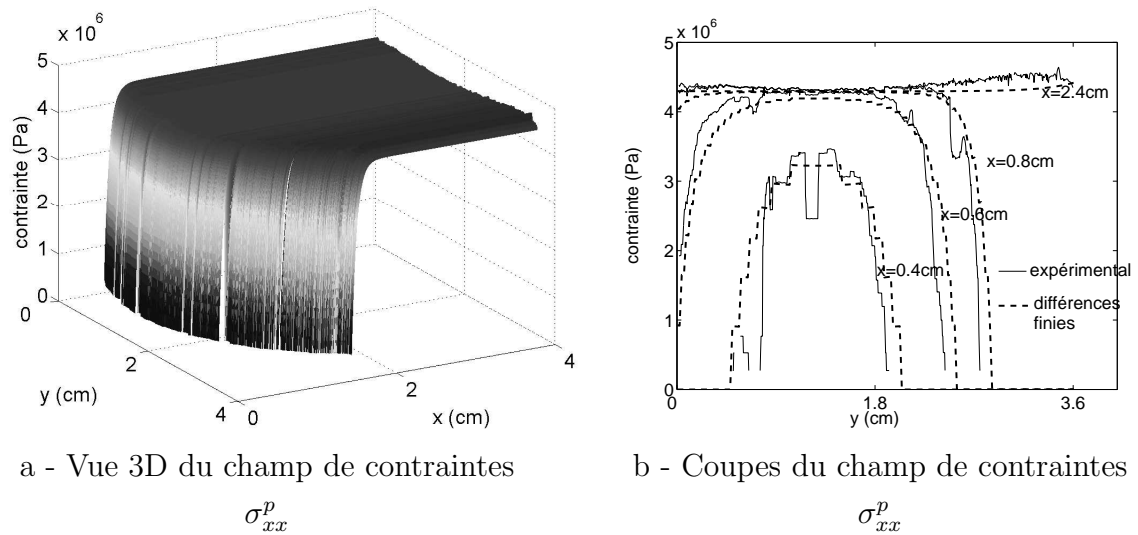


FIG. 6.19 – Champ de contraintes σ_{xx}^p dans le composite dans le cas d'un essai à 90 degrés.

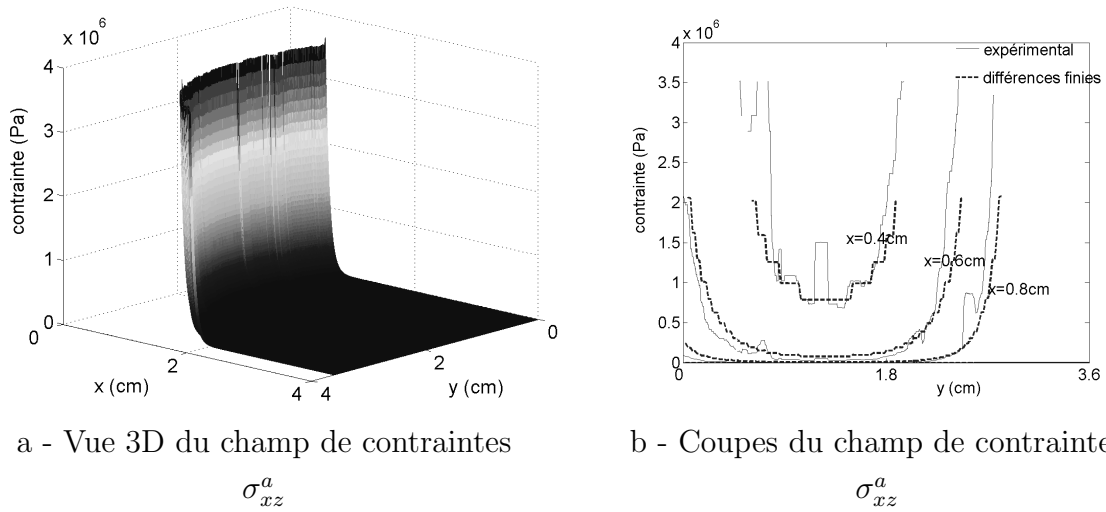


FIG. 6.20 – Champ de contraintes σ_{xz}^a dans la colle dans le cas d'un essai à 90 degrés.

6.6.2.4 Champ de déplacements transversal u_y^p

La Figure 6.21 représente le champ de déplacements transversal u_y^p après filtrage. Par soucis de simplicité, l'origine de l'axe des déplacements est choisie de telle sorte qu'elle soit égale à zéro au bord libre $y = 0$. Loin du bord libre du patch composite ($y > 10$ mm), le champ de déplacements u_y^p est quasi linéaire suivant la direction y . Près du bord libre $y = 0$, l'évolution du champ de déplacements est fortement non linéaire et correspond au « plateau » de déplacements de la Figure 6.21. La Figure 6.21b permet de voir les fluctuations de ce champ suivant la direction x . Le déplacement dans le composite est légèrement plus important au centre du bord supérieur du composite. Il est à peu près constant loin du bord libre pour un y donné. Cette différence entraîne une déformation plus importante sur les bords du patchs composites. Pour évaluer cette différence, le champ de contraintes longitudinal dans le composite est calculé ci-après.

6.6.2.5 Champ de contraintes transversal dans le composite σ_{yy}^p

La Figure 6.22a présente l'évolution de la contrainte longitudinale σ_{yy}^p calculée dans le patch composite. Une zone de transfert d'effort est clairement visible : les contraintes sont égales à 0 au bord libre et convergent vers une valeur limite loin de ce dernier. La contrainte longitudinale est négative du fait de l'état de compression créée par la différence des coefficients de Poisson entre le substrat et le composite. En effet, cette zone de transfert d'effort transversale est due au fait que l'aluminium se rétracte alors que le composite a tendance à empêcher cette striction. La Figure 6.22b représente différentes coupes du champ de contraintes pour différentes ordonnées tel

que $y = cste$. La distribution de ces contraintes n'est pas la même que la coupe se trouve ou non à proximité du bord libre. En effet, pour des faibles valeurs de y , la distribution suivant x représente un arc de cercle, alors que pour des valeurs élevées de y , cette même distribution est quasi linéaire. De plus, la contrainte longitudinale est légèrement plus faible au centre du patch composite que sur les bords d'abscisses $x = 0$ cm et $x = 4$ cm.

Un écart de l'ordre de 20% apparaît entre les distributions calculées à partir des mesures et par le programme par différences finies. Cet écart est notamment dû aux incertitudes sur les coefficients de Poisson, sur la valeur du module d'Young transversal E_y ainsi que sur les conditions aux limites différentes entre les essais et les calculs numériques.

6.6.2.6 Champ de cisaillement transversal dans la colle σ_{yz}^a

Le champ de contraintes dans la colle peut être calculé à partir du champ de contraintes transversal dans le patch composite en utilisant l'Equation (6.10). La Figure 6.23a présente l'évolution de la contrainte de cisaillement calculée σ_{yz}^a en fonction de x et de y . Le cisaillement est maximal au bord libre $y = 0$ et dépend de la direction x . La Figure 6.23b représente différentes coupes du champ de contraintes pour des ordonnées y fixées. Pour des faibles valeurs de y , la distribution suivant x représente un arc de cercle, alors que pour des valeurs élevées de y , cette même distribution est quasi linéaire. La contrainte maximale de cisaillement est aussi représentée sur la Figure 6.23b pour $y = 2,4$ cm. Cette contrainte maximale est à peu près constante suivant la direction x . Cependant, elle est légèrement inférieure au centre du patch composite. Il est à noter qu'aucun pic de contrainte dû au couplage des deux directions n'apparaît, contrairement au patch rectangulaire (voir Figure 6.6). Cela s'explique par la courbure du patch qui atténue l'effet du couplage entre les deux directions. Comme dans le cas de la distribution de σ_{yy}^p , un écart de l'ordre de 20% apparaît entre les distributions de σ_{yz}^a calculées à partir des mesures et par différences finies. Cet écart est notamment dû aux incertitudes sur les données matérielles ainsi que sur les conditions aux limites différentes entre les essais et les calculs numériques.

Le Tableau 6.4 représente les contraintes maximales de chaque matériau ainsi que les valeurs de critère de rupture de chaque matériau ramenées en pourcentage pour pouvoir comparer les défaillances. Il est intéressant de noter que le rapport maximal est obtenu pour le composite et vaut 9,2%. Cela signifie que, dans ce cas, la défaillance du renforcement serait causée par la rupture du composite.

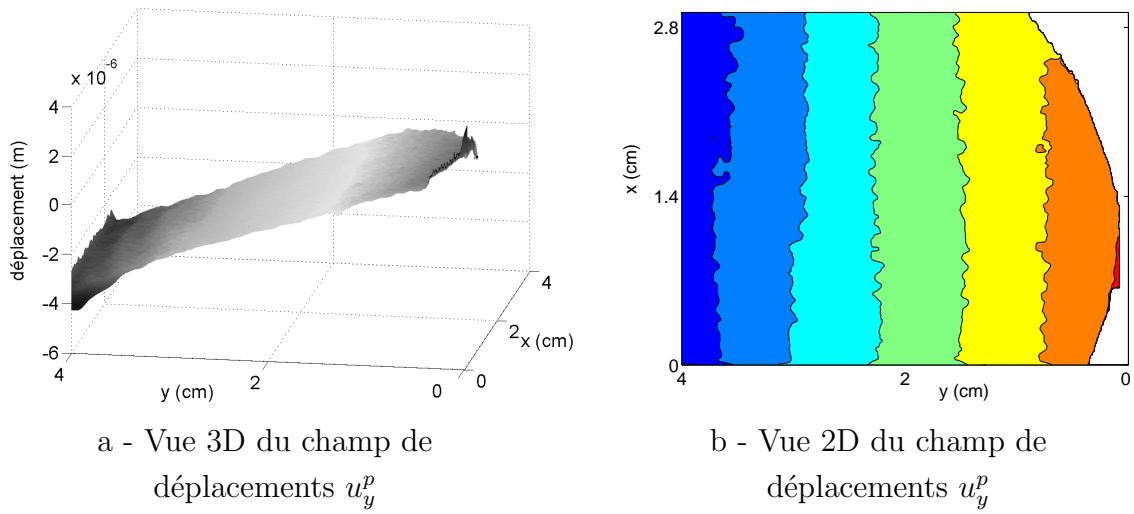


FIG. 6.21 – Champ de déplacements u_y^p dans le composite dans le cas d'un essai à 90 degrés.

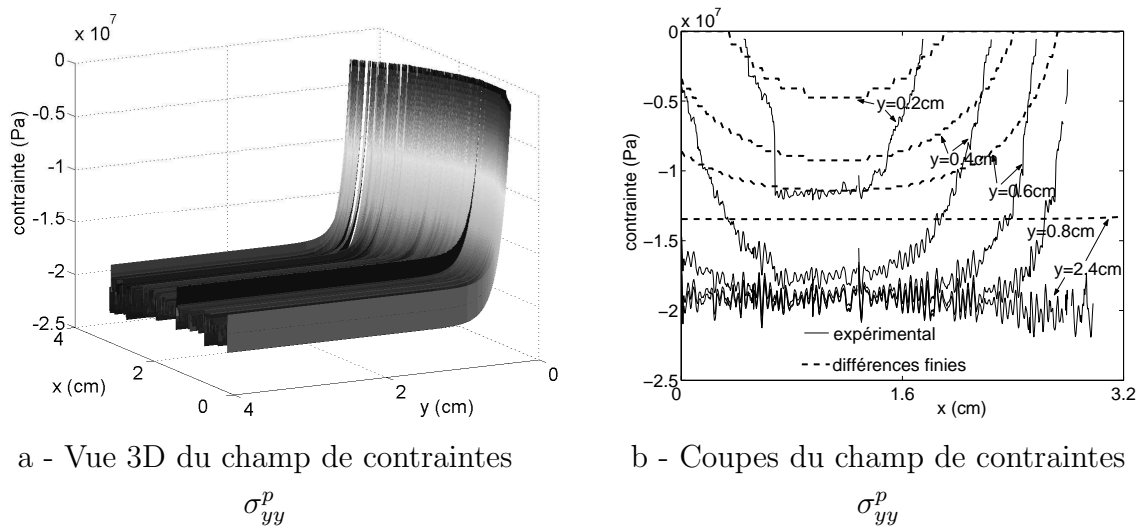


FIG. 6.22 – Champ de contraintes σ_{yy}^p dans le composite dans le cas d'un essai à 90 degrés.

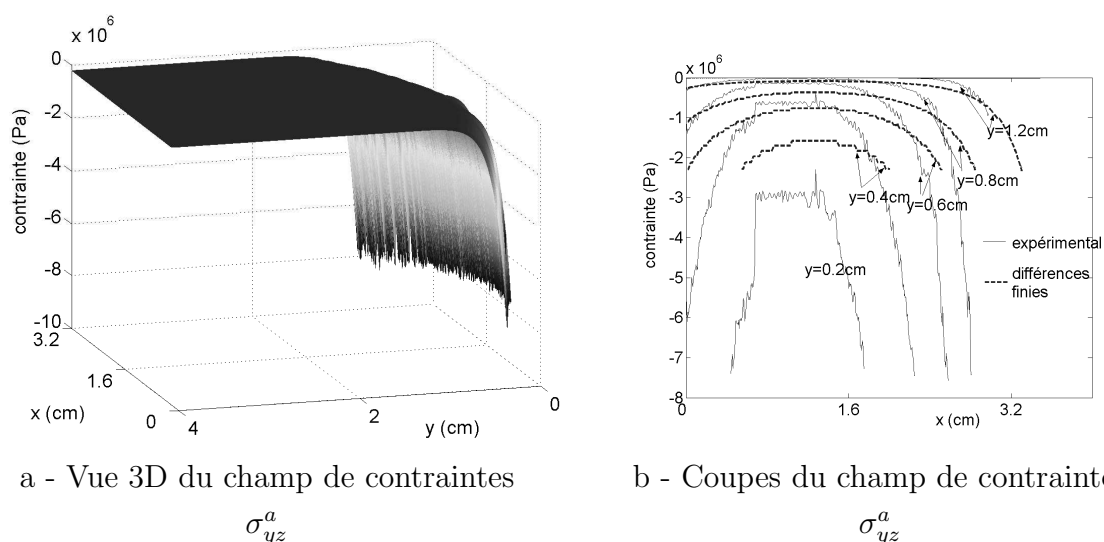


FIG. 6.23 – Champ de contraintes σ_{yz}^a dans la colle dans le cas d'un essai à 90 degrés.

| | Composite | Aluminium | Colle |
|-----------------------------|------------|-----------|-------|
| Direction longitudinale | | | |
| Résistances (MPa) | 42 | 440 | 40 |
| Contraintes maximales (MPa) | 4,6 | 35 | 3,8 |
| Direction transversale | | | |
| Résistances (MPa) | 1000 | 440 | 40 |
| Contraintes maximales (MPa) | 22 | 2,75 | 7,6 |
| Rapport r (%) | 9,2 | 0,6 | 4,5 |

TAB. 6.4 – Rapports des contraintes maximales avec les résistances de chacun des matériaux dans le cas d'un patch circulaire à 90 degrés.

6.6.3 Conclusion

Les tests de traction effectués sur des éprouvettes renforcées par des patches circulaires permettent d'établir les conclusions suivantes :

- l'approche par différences finies permet de calculer qualitativement les distributions des contraintes dans le composite et dans la colle ;
- dans le cas où les fibres sont orientées à 90 degrés, la différence des coefficients de Poisson entre le composite et le substrat est élevée et provoque une zone de transfert transversale ;
- dans le cas où les fibres sont orientées à 90 degrés, la courbure atténue le couplage entre les deux directions. De ce fait, la distribution du cisaillement

dans la colle ne présente pas de pic contrairement au patch rectangulaire (voir Figure 6.6) ;

- la défaillance du renfort dépend de l'orientation des fibres. Dans le cas des fibres orientées à 0 degré, la défaillance provient de la rupture de la colle alors que, dans le cas des fibres orientées à 90 degrés, la rupture du patch composite entraîne la défaillance du renforcement.

6.7 Calculs des incertitudes

6.7.1 Introduction

L'objectif ici est de donner quelques éléments sur l'incertitude avec laquelle les différents résultats présentés précédemment ont été obtenus.

6.7.2 Incertitudes et loi de propagation

Le Tableau 6.5 présente les incertitudes de chaque donnée.

| | E_x | E_y | E_s | G_a | e_p | e_s | e_a | F | S |
|--------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|-----|
| Incertitudes | 5% | 5% | 5% | 10% | 1% | 1% | 10% | 10 N | 1% |

TAB. 6.5 – Incertitudes sur les données d'entrées.

Soit le processus de mesure Y , définie par l'Equation (6.17), qui dépend des grandeurs d'entrées X_1, X_2, \dots, X_N :

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N) \quad (6.17)$$

L'Equation (6.18) présente la loi de propagation utilisée, tirée de la méthode GUM [61], pour calculer les incertitudes des contraintes dans le patch et dans l'adhésif :

$$\Delta Y = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial X_i} \Delta X_i \quad (6.18)$$

6.7.3 Calcul d'incertitudes sur les valeurs limites

Les incertitudes sont calculées par rapport aux valeurs limites des composantes calculées.

6.7.3.1 Incertitude sur u_x^p

Le déplacement maximal $u_x^p max$ dans le substrat peut être approché par :

$$u_x^p max = \frac{Fl_x}{SE_s} \quad (6.19)$$

En utilisant l'Equation (6.18), l'incertitude sur le déplacement maximal est égale à :

$$\frac{\Delta u_x^p max}{u_x^p max} = \frac{\Delta F}{F} + \frac{\Delta S}{S} + \frac{\Delta E_s}{E_s} + \frac{\Delta l_x}{l_x} \quad (6.20)$$

6.7.3.2 Incertitude sur σ_{xx}^p

La contrainte limite $\sigma_{xx}^p limite$ dans le patch s'écrit :

$$\sigma_{xx}^p limite = \frac{FE_x e_s}{S(E_x e_p + E_s e_s)} \quad (6.21)$$

En utilisant les Equations (6.18) et (6.21), l'incertitude sur la contrainte limite est égale à :

$$\frac{\Delta \sigma_{xx}^p limite}{\sigma_{xx}^p limite} = \frac{\Delta F}{F} + \frac{\Delta S}{S} + \frac{\Delta E_x}{E_x} + \frac{\Delta e_s}{e_s} + \frac{\left(E_s e_s \left(\frac{\Delta E_s}{E_s} + \frac{\Delta e_s}{e_s} \right) + E_x e_p \left(\frac{\Delta E_x}{E_x} + \frac{\Delta e_p}{e_p} \right) \right)}{(E_s e_s + E_x e_p)} \quad (6.22)$$

6.7.3.3 Incertitude sur σ_{xz}^a

La contrainte limite $\sigma_{xz}^a limite$ dans l'adhésif s'écrit :

$$\sigma_{xz}^a limite = \frac{F}{S} \sqrt{\frac{G_a E_x e_s e_p}{e_a E_s (E_s e_s + E_x e_p)}} \left(\frac{1 - \cosh\left(\sqrt{\frac{G_a}{e_a}} \left(\frac{1}{e_p E_x} + \frac{1}{e_s E_s} \right) l_x\right)}{\sinh\left(\sqrt{\frac{G_a}{e_a}} \left(\frac{1}{e_p E_x} + \frac{1}{e_s E_s} \right) l_x\right)} \right) \quad (6.23)$$

En utilisant l'Equation (6.18), l'incertitude sur la contrainte limite est égale à :

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta\sigma_{xz}^a \text{limite}}{\sigma_{xz}^a \text{limite}} &= \frac{\Delta F}{F} + \frac{\Delta S}{S} + \frac{\Delta E_x}{2E_x} + \frac{\Delta E_s}{2E_s} + \frac{\Delta G_a}{2G_a} + \frac{\Delta e_s}{2e_s} + \frac{\Delta e_p}{2e_p} + \frac{\Delta e_a}{2e_a} + \\
&\frac{\left(E_s e_s \left(\frac{\Delta E_s}{E_s} + \frac{\Delta e_s}{e_s} \right) + E_x e_p \left(\frac{\Delta E_x}{E_x} + \frac{\Delta e_p}{e_p} \right) \right)}{2(E_s e_s + E_x e_p)} + \frac{\tanh^2 \left(\sqrt{\frac{G_a}{e_a} \left(\frac{1}{e_p E_x} + \frac{1}{e_s E_s} \right) l_x} \right) + 1}{\tanh \left(\sqrt{\frac{G_a}{e_a} \left(\frac{1}{e_p E_x} + \frac{1}{e_s E_s} \right) l_x} \right)} \times \\
&\left(\frac{\Delta G_a l_x}{2G_a} + \frac{\Delta e_a l_x}{2e_a} + \frac{\left(E_s e_s \left(\frac{\Delta E_s}{E_s} + \frac{\Delta e_s}{e_s} \right) + E_x e_x \left(\frac{\Delta E_x}{E_x} + \frac{\Delta e_x}{e_x} \right) \right) l_x}{2(E_s e_s + E_x e_p)} + \Delta l_x \right) \times \\
&\sqrt{\frac{G_a}{e_a} \left(\frac{1}{e_p E_x} + \frac{1}{e_s E_s} \right)} \quad (6.24)
\end{aligned}$$

6.7.4 Applications

Les équations obtenues vont maintenant être appliquées afin d'obtenir les diverses incertitudes sur les grandeurs calculées à partir des mesures. Ce qui différencie les calculs d'incertitudes entre les patchs circulaires et rectangulaires est le niveau de chargement. Or l'incertitude de ce dernier est très faible par rapport aux autres incertitudes. De plus, étant donné que l'incertitude relative sur les caractéristiques matérielles du composite est la même dans le sens longitudinal et dans le sens transversal, les calculs d'incertitudes sont les mêmes dans les cas de patchs rectangulaires et circulaires, à 0 et 90 degrés. Le Tableau 6.6 présente les incertitudes calculées.

| | $u_x^p \text{max}$ | $\sigma_{xx}^p \text{limite}$ | $\sigma_{xz}^a \text{limite}$ |
|-------------|--------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| Incertitude | 7% | 13% | 137% |

TAB. 6.6 – Calculs d'incertitudes.

Les valeurs d'incertitudes indiquées sont à titre d'information et permettent de voir la confiance à donner aux résultats. L'incertitude liée à la contrainte dans la colle est assez élevée du fait de l'incertitude sur les caractéristiques matérielles de la colle. De plus, on passe d'une colonne à l'autre (de gauche à droite) par dérivation successives, ce qui amplifie l'incertitude à chaque fois. Il faut bien voir qu'à ces incertitudes s'ajoutent les erreurs de modèle puisque l'on utilise une loi unidimensionnelle et pas bidimensionnelle pour le calcul des contraintes dans le patch par exemple.

6.8 Patch en forme de spline

Des tests de traction sont conduits sur des éprouvettes renforcées par des patches dont la géométrie est définie par une courbe spline fermée. Ces essais sont effectués sur des éprouvettes équilibrées, afin d'amoindrir un quelconque mouvement hors-plan. La géométrie et l'orientation des fibres du patch composite sont celles du patch optimisé dans le cas d'un essai de traction (voir chapitre 3). Ces essais ont pour but de comparer les champs cinématiques obtenus expérimentalement et par éléments finis afin d'étudier d'éventuelles différences avec le modèle par éléments finis du chapitre 3. Les champs de déformations ne sont pas calculés ici car l'approximation précédente n'est plus valide. Une soixantaine d'essais a été effectuée, en démontant, remontant ainsi qu'en retournant l'éprouvette afin d'assurer la répétabilité des phénomènes observés. Seuls les essais les plus représentatifs sont reportés dans les paragraphes suivants.

6.8.1 Champ de déplacements longitudinal u_x^p

La Figure 6.24 représente le champ filtré du déplacement longitudinal u_x^p , obtenu dans le cas d'un essai de traction uniaxiale dans le cas du patch optimisé de la partie 2. Le déplacement imposé conduit à un effort de 10 kN, ce qui donne une contrainte égale à 35 MPa dans le substrat.

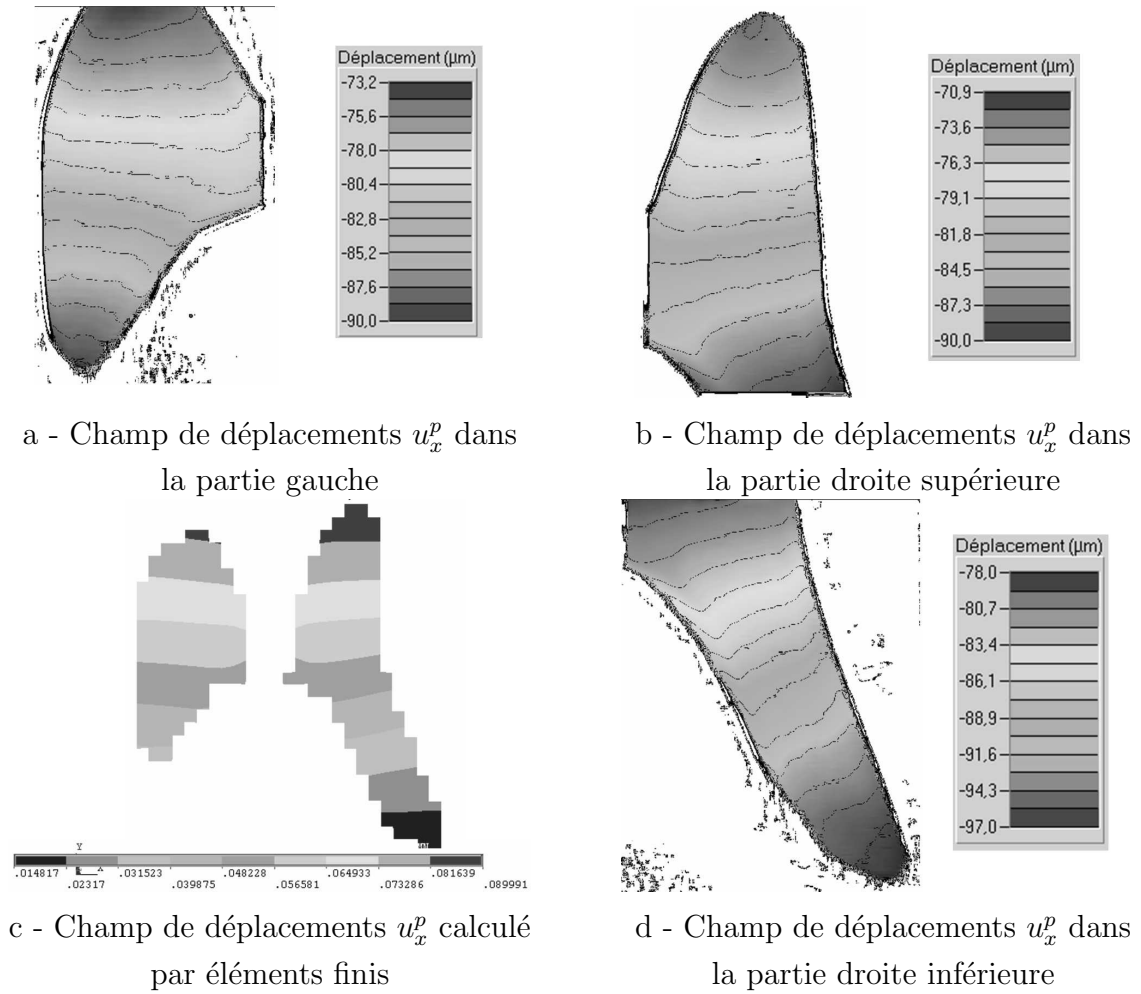


FIG. 6.24 – Champ de déplacements u_x^p dans le composite dans le cas d'un patch en forme de spline.

Les champs de déplacements u_x^p numérique et expérimental ont globalement la même distribution. Cependant, il existe quelques différences aux extrémités du patch où une courbure de la distribution du champ de déplacements apparaît. Cette courbure peut s'expliquer par la présence d'une zone de transfert d'effort du substrat vers le composite. En effet, au centre de l'extrémité du patch, il existe une zone de transfert provoquant ainsi une faible variation du déplacement longitudinal u_x^p . Sur les bords latéraux du patch, la zone de transfert d'effort longitudinale est quasi nulle. Ceci provoque une forte variation du déplacement longitudinal u_x^p . Les deux effets réunis entraînent une courbure du champ de déplacements aux extrémités du patch composite qui n'est pas détectée avec le modèle par éléments finis.

6.8.2 Champ de déplacements transversal u_y^p

La Figure 6.25 représente le champ de déplacements transversal u_y^p après filtrage.

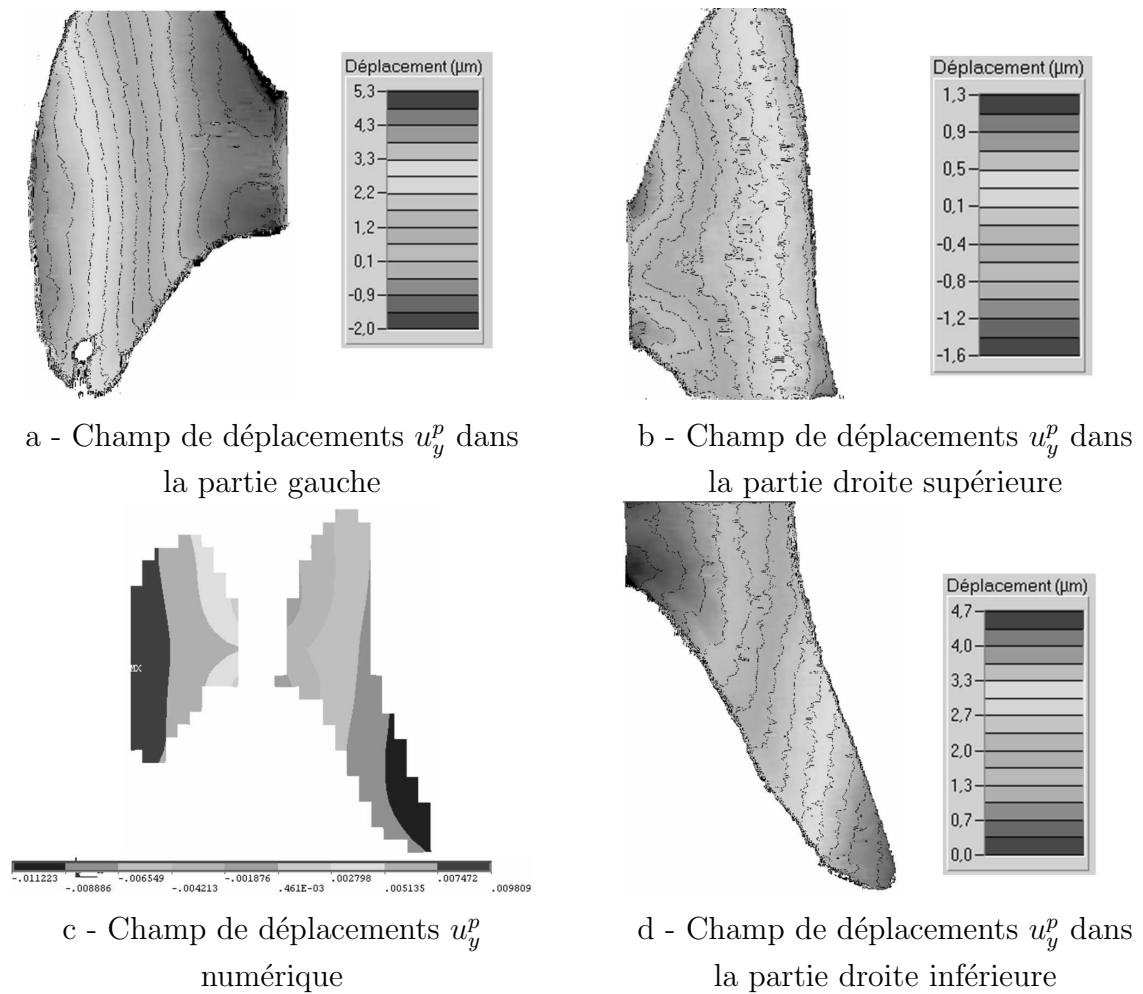


FIG. 6.25 – Champ de déplacements u_y^p dans le composite dans le cas d'un patch en forme de spline.

Les distributions des champs de déplacements u_y^p numérique et expérimental ont globalement la même allure. Au bord du trou, les variations du champ de déplacements transversal u_y^p sont les mêmes expérimentalement et numériquement. De plus, le champ de déplacements expérimental de la partie gauche du patch présente sensiblement la même courbure que le champ de déplacements numérique. Cependant, le champ de déplacements expérimental ne présente pas de courbure importante au niveau de l'extrémité inférieure droite. Ceci peut s'expliquer par le fait que la largeur du patch est faible à cet endroit, ce qui amoindrit la variation du déplacement u_y^p . En effet, le transfert d'effort a tendance à créer un mouvement de solide rigide près des bords libres et, étant donné la proximité des deux bords libres de la partie inférieure droite, cela amoindrit la variation des déplacements.

6.8.3 Conclusion

Les champs de déplacements expérimental et numérique sont quasiment similaires. Seules des différences de courbures existent entre les deux champs de déplacements. Ces différences de courbures sont notamment dues aux zones de transfert d'effort qui changent localement la distribution des champs de déplacements.

6.9 Conclusion de l'étude expérimentale

La méthode de la grille a été utilisée afin de mesurer le champ de déplacements en surface d'un renfort composite. Les résultats expérimentaux et numériques ont clairement montré des phénomènes bidimensionnels qui ne sont pas pris en compte par une approche unidimensionnelle. En effet, dans le cas d'un patch dont les fibres sont orientées à 90 degrés, des zones de transferts d'effort transversales couplées apparaissent. L'étude a ensuite montré l'influence de la géométrie, avec notamment un adoucissement du pic de cisaillement avec un patch circulaire par rapport à un patch rectangulaire. Finalement, des essais ont été menés sur un patch optimisé de la partie 2, dont la géométrie est définie par une courbe spline fermée. Ces essais ont montré l'influence des hypothèses du modèle développé dans la partie 2. La Figure 6.26 résume les résultats de ce chapitre.

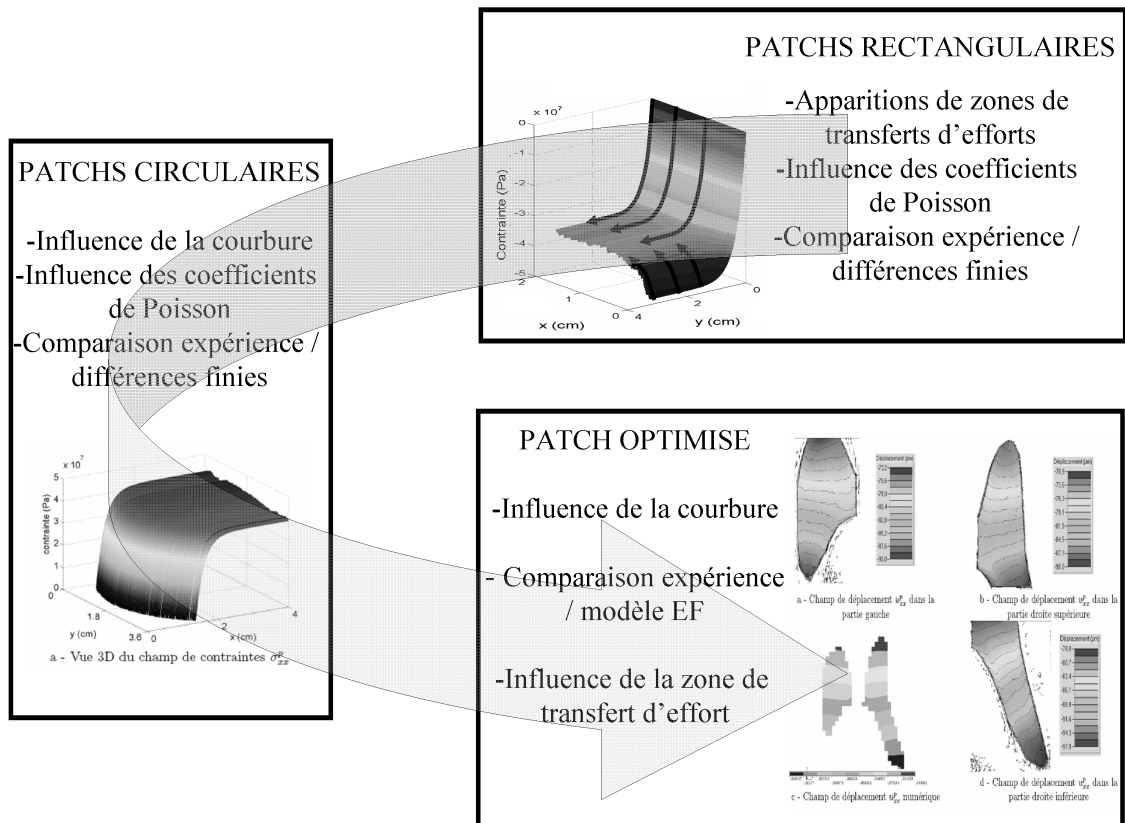


FIG. 6.26 – Résumé du chapitre 6.

Conclusions et perspectives

Conclusions

L'élaboration de ce sujet de thèse répondait à des préoccupations industrielles liées à la maintenance aéronautique. Nombre de questions ont été posées, et seules quelques-unes d'entre elles ont pu être approfondies lors de ces trois années de thèse.

La première question concernait la forme du renfort composite. Une réflexion sur ce sujet nous a amenés à développer et utiliser un algorithme génétique afin d'optimiser non seulement l'orientation des plis, mais aussi la forme du patch composite. L'une des principales difficultés a été le couplage avec un code de calcul par éléments finis. Certains opérateurs ont dû être adaptés ou rajoutés afin d'obtenir un outil d'optimisation performant. Ce qui ressort du point de vue mécanique est la notion de « renforcement à distance » mise en lumière lors de cette étude : il semble plus efficace de renforcer globalement que localement une zone endommagée. Ce concept repose sur une déviation du flux de contraintes dans la structure et constitue l'un des apports principaux de cette thèse. Néanmoins, il est important de vérifier en pratique que l'augmentation des efforts ne s'effectue pas de façon trop importante dans une autre zone endommagée.

Une fois le patch optimisé, la question de l'analyse des contraintes dans le renfort et dans la colle s'est alors posée. Cette étude passe notamment par l'analyse des mécanismes qui entrent en jeu lors du renforcement de structures par matériaux composites. Ces mécanismes sont amplement décrits dans la littérature dans le cas unidimensionnel. L'un des principaux apports de cette thèse est le développement d'un modèle de renforcement par plaque afin de comprendre et de mettre en évidence les mécanismes bidimensionnels qui interviennent dans ce cas. Diverses applications ont montré l'apparition de zones de transfert couplées, dues essentiellement à la différence des coefficients de Poisson entre le composite et le substrat.

La validation expérimentale des travaux développés durant cette thèse a été un point important afin de comparer d'éventuelles différences avec les divers modèles

mécaniques développés. La méthode expérimentale choisie est une mesure de champs cinématiques sans contact : la méthode de la grille. Elle a été utilisée avec une fonction de lissage afin de mettre en évidence le transfert d'effort du substrat vers le patch composite. Ceci nous a permis de souligner les mécanismes bidimensionnels calculés par les modèles analytiques et numériques développés. Diverses formes de patches ont été étudiées afin d'analyser l'influence de la géométrie. Des essais sur un patch, optimisé dans la première partie, ont permis d'évaluer l'influence des hypothèses mécaniques effectuées dans le modèle implanté dans l'algorithme génétique. L'apport principal de cette partie expérimentale est la caractérisation de la zone de transfert sur des patches de diverses formes.

Perspectives envisagées

Etant donné le nombre de questions que nous nous sommes posées au début de cette thèse, bon nombre d'interrogations scientifiques restent en suspens. Les premières perspectives que l'on peut envisager constituent une continuité directe de ce travail.

Du point de vue de l'algorithme génétique, l'une de ces perspectives concerne le modèle mécanique qui a été développé en deux dimensions. Ce choix s'explique par le fait que le calcul d'optimisation par algorithme génétique durait beaucoup plus longtemps en début de thèse qu'en fin de thèse du fait des progrès technologiques effectués en terme de puissance de calcul. Ces progrès permettent dès à présent d'envisager un modèle mécanique tridimensionnel afin de l'intégrer dans l'algorithme génétique. Ce modèle permettrait d'intégrer le comportement de la colle et d'élaborer une nouvelle fonction objectif qui tiendrait compte à la fois du renforcement effectif et des contraintes dans le renfort et dans la colle. Une autre perspective est d'utiliser l'AG sur des designs de patches de voilure, de les tester et de valider l'ensemble de la démarche. Une étude interne DGA est en cours afin de réaliser cette dernière tâche.

L'évaluation des contraintes dans le renfort et dans la colle est un point important et de nombreuses perspectives de ce travail de thèse sont envisageables sur ce sujet. La première constitue une continuité du modèle analytique développé. Il serait intéressant de remplacer le comportement élastique de l'adhésif par un comportement élasto-plastique afin de développer un critère de rupture bidimensionnel plus proche de la réalité. Des essais *in situ* pourrait compléter cette étude afin de valider ou non cette approche. Un autre aspect concerne l'extension du modèle bidimensionnel analytique en un modèle analytique en trois dimensions. Un tel modèle

permettrait en effet d'intégrer des modes de rupture dans l'épaisseur de colle qui ne sont pas pris en compte dans les modèles développés dans ce travail.

D'autres perspectives peuvent être envisagées, notamment autour du comportement de la colle. Le principal chargement étudié dans cette thèse est d'origine mécanique. Or, la plupart des structures aéronautiques sont soumises à des chargements thermiques qui peuvent atteindre 100 °C d'amplitude. Il serait intéressant, dans un premier temps, d'étudier l'influence d'un tel chargement thermique sur la colle. Une étude thermoélastique permettrait ensuite de connaître plus précisément l'état mécanique interne de la colle suite à un chargement thermomécanique. Le choix initial du carbone/époxyde (et pas du bore/époxyde) serait alors sans doute à rediscuter dans ce cadre.

L'influence du procédé de collage du renfort peut être aussi analysée. En effet, quelques mesures préliminaires ont révélé une certaine variabilité de l'épaisseur du joint de colle qui peut aller du simple au triple. Cette variabilité peut être modélisée par un processus stochastique. Il devient alors possible de développer un modèle mécano-fiabiliste afin d'évaluer une probabilité de défaillance à partir d'un procédé de collage donné. Quelques travaux préliminaires ont été conduits dans ce sens lors de projets d'étudiants IFMA.

De nombreuses perspectives expérimentales sont envisageables autour du thème du renforcement. La première est l'étude de la rupture de structures renforcées. En effet, plusieurs modèles développés dans cette thèse ont prédit le point faible du renfort dans divers cas. Il serait intéressant de mener des essais à rupture afin d'étudier le comportement réel de structures renforcées. Cette étude n'a pas pu être réalisée faute d'un nombre insuffisant d'éprouvettes. Une autre perspective concerne une comparaison des diverses méthodes de mesures sans contact afin de caractériser au mieux la zone de transfert d'effort. Ainsi, il serait intéressant de comparer, pour une éprouvette donnée, la méthode de la grille, la corrélation d'images et l'interférométrie par exemple. La thermoélasticité permettrait aussi sans doute d'obtenir des informations intéressantes sur les éprouvettes testées.

D'autres études expérimentales sont possibles autour du thème de la durabilité du renfort composite. Il serait intéressant de regarder l'influence de l'environnement ou encore du vieillissement sur le comportement d'une structure renforcée par un patch composite. En effet, en situation réelle, les structures aéronautiques sont soumises à des conditions d'utilisation sévères, et l'influence de ces conditions sur le comportement global peut être importante.

Enfin, la plus importante des perspectives est certainement d'appliquer à des cas réels de voilures les concepts développés dans le cadre de cette thèse. Un travail est actuellement conduit dans ce sens au sein de la DGA.

Annexes

Annexe 1

Calcul de $\frac{a}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\pi c)$

Le but ici est de calculer :

$$\alpha = \frac{a}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\pi c) \quad (6.25)$$

Soit la fonction F définie par :

$$F(x) = \frac{a}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\pi x) \quad (6.26)$$

Pour $x = c$:

$$F(c) = \alpha \quad (6.27)$$

Considérons maintenant une autre fonction f définie par :

$$f(x) = (1 - x) \text{ pour } 0 \leq x < T \quad (6.28)$$

f est périodique pour $x \geq T$ (voir Figure 6.27).

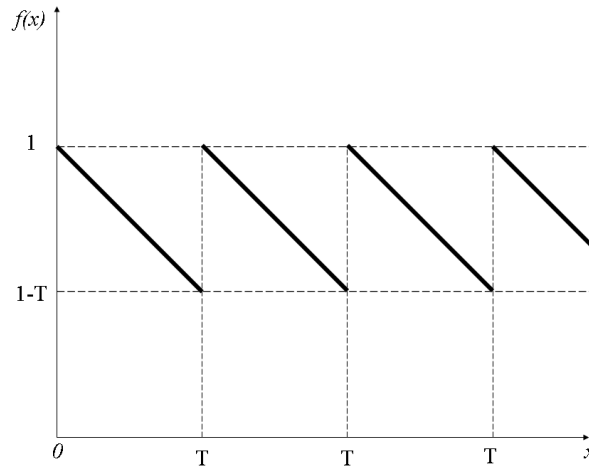


FIG. 6.27 – Fonction f .

Considérons le développement en séries de Fourier de la fonction f . Ce développement est défini par ses coefficients $a_i, i = 0 \cdots + \infty$ et $b_i, i = 1 \cdots + \infty$, tel que :

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\frac{2n\pi}{T}x) + b_n \sin(\frac{2n\pi}{T}x)] \quad (6.29)$$

avec :

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx \\ a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos(\frac{2n\pi}{T}x) dx \\ b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin(\frac{2n\pi}{T}x) dx \end{cases} \quad (6.30)$$

Il est facile de montrer :

$$\begin{cases} a_0 = (1 - \frac{T}{2}), & a_n = 0 \quad \forall n \geq 1 \\ b_n = \frac{T}{n\pi} \end{cases} \quad (6.31)$$

Alors la fonction $f(x)$ s'écrit :

$$f(x) = (1 - \frac{T}{2}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T}{n\pi} \sin(\frac{2n\pi}{T}x) \quad (6.32)$$

En choisissant une période $T = 2$ et en comparant les Equations (6.26) et (6.32), l'Equation suivante est obtenue :

$$F(x) = \frac{a}{b} \frac{\pi}{T} (f(x) - a_0) \quad (6.33)$$

Soit :

$$F(x) = \frac{a\pi}{2b}[1-x] \quad (6.34)$$

En intégrant la dernière expression dans l'Equation (6.27), l'expression suivante est calculée :

$$\frac{a}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\pi c) = \frac{a\pi}{2b}(1-c) \quad (6.35)$$

Annexe 2

Calcul de $-\frac{a}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + b} \sin(n\pi c)$

Le but ici est de calculer :

$$\beta = -\frac{a}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + b} \sin(n\pi c) \quad (6.36)$$

Pour cela, considérons une fonction G définie par :

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{a}{b} \frac{n}{n^2 + b} \sin(n\pi x) \quad (6.37)$$

Pour $x = c$:

$$G(c) = \beta \quad (6.38)$$

Considérons maintenant une autre fonction g définie par :

$$g(x) = \gamma \sinh(k(\frac{1}{2} - \frac{x}{T})), 0 \leq x < T, \gamma, k \in \mathbb{R} \quad (6.39)$$

g est périodique pour $x \geq T$ (voir Figure 6.28).

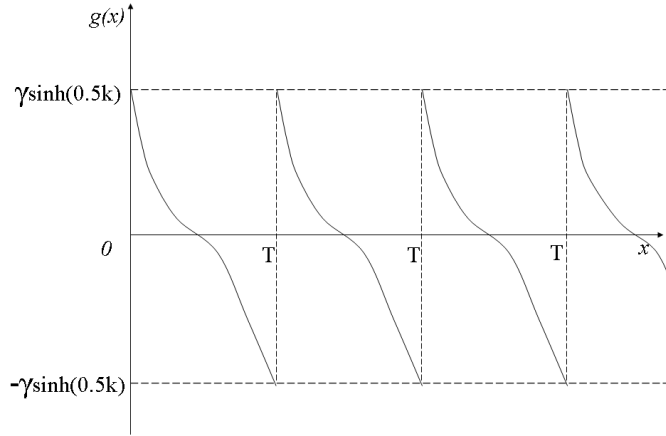


FIG. 6.28 – Function g .

L'objectif ici est de calculer le développement en séries de Fourier de la fonction g . Ce développement est défini par ses coefficients $a_i, i = 0 \cdots +\infty$ et $b_i, i = 1 \cdots +\infty$, tel que :

$$g(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\frac{2n\pi}{T}x) + b_n \sin(\frac{2n\pi}{T}x)] \quad (6.40)$$

g est une fonction impaire, ce qui implique $a_n = 0$. b_n est défini par :

$$b_n = \frac{2\gamma}{T} \int_0^T \sinh(k(\frac{1}{2} - \frac{x}{T})) \sin(n\omega x) dx \quad (6.41)$$

En faisant une intégration par partie, l'Equation suivante est obtenue :

$$b_n = \frac{n}{(\frac{k}{2\pi})^2 + n^2} \frac{2\gamma}{\pi} \sinh(\frac{k}{2}) \quad (6.42)$$

En conclusion :

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(\frac{k}{2\pi})^2 + n^2} \frac{2\gamma}{\pi} \sinh(\frac{k}{2}) \times \sin(\frac{2n\pi}{T}x) \quad (6.43)$$

En comparant l'Equation (6.43) et la définition de β dans l'Equation (6.36), les relations suivantes sont calculées :

$$\begin{cases} b = (\frac{k}{2\pi})^2 \\ T = 2 \\ -\frac{a}{b} = \frac{2\gamma}{\pi} \sinh(\frac{k}{2}) \end{cases} \quad (6.44)$$

Soient $k = 2\pi\sqrt{b}$ et $\gamma = -\frac{a}{b} \frac{\pi}{2 \sinh(\pi\sqrt{b})}$. En conclusion :

$$-\frac{a}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + b} \sin(n\pi c) = -\frac{a}{b} \frac{\pi}{2 \sinh(\pi\sqrt{b})} \sinh(\pi\sqrt{b}(1 - c)) \quad (6.45)$$

Bibliographie

Bibliographie

- [1] ADAMS, R., AIVAZZADEH, S., CARDON, A., AND RIGOLOT, A. *Mechanical behaviour of adhesive joints*. Pluralis, 1997.
- [2] ADAMS, R., AND WAKE, W. *Structural adhesive joints in engineering*. Elsevier, 1984.
- [3] AVRAM, J. *Fatigue response of thin stiffened aluminum cracked panels repaired with bonded composite patches*. PhD thesis, Air Force Institute of Technology, 2001.
- [4] AVRIL, S., FERRIER, E., VAUTRIN, A., HAMELIN, P., AND SURREL, Y. A full-field optical method for the experimental analysis of reinforced concrete beams repaired with composites. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing* 35, 7 (2004).
- [5] BAKER, A. Repair of cracked or defective metallic aircraft components with advanced fibre composites - an overview of australian work. *Composite Structures* 2 (1984), 153–181.
- [6] BAKER, A. Bonded composite repair of metallic aircraft components - overview of australian activities. *AGARD-CP-550* (1995), 1–14.
- [7] BAKER, A. Bonded composite repair of fatigue-cracked primary aircraft structure. *Composite Structures* 47 (1999), 431–443.
- [8] BAKER, A., AND AKTEPE, B. Sensor techniques to validate the stress intensity in cracked metallic panels repaired with bonded composite patches. Tech. rep., Defense Science and Technology Organisation, Australia.
- [9] BAKER, A., AND JONES, R. *Bonded repair of aircraft structures*. Martinus Nijhoff Publishers, 1988.
- [10] BARDIS, J., AND KEDWARD, K. Effects of surface preparation on long-term durability of composite adhesive bonds. Tech. Rep. DOT/FAA/AR-01/8, Federal Aviation Administration, 2001.
- [11] BARTOLOMEUSZ, R. A., BAKER, A. A., CHESTER, R. J., AND SEARL, A. Bonded joints with through-thickness adhesive stresses - reinforcing the f/a-18

-
- y470.5 bulkhead. *International Journal of Adhesion and Adhesives* 19 (1999), 173–180.
- [12] BEASLEY, D., BULL, D., AND MARTIN, R. An overview of genetic algorithms : Part 1, fundamentals. *University Computing* 15, 2 (1993), 58–59.
 - [13] BERTHELOT, J.-M. *Matériaux composites*. Lavoisier, 1999.
 - [14] BOUIADJRA, B. B., BELHOUARI, M., AND SERIER, B. Computation of the stress intensity factors for repaired cracks with bonded composite patch in mode i and mixed mode. *Composite Structures* 56 (2002), 401–406.
 - [15] BUIL, C. *Le bruit dans une caméra CCD*. [http ://www.astrosurf.com/ccdbazar/D-Materiel/BruitCamera1/Bruit01.html](http://www.astrosurf.com/ccdbazar/D-Materiel/BruitCamera1/Bruit01.html), 1998.
 - [16] CANTÙ-PAZ, E., AND GOLDBERG, D. E. Efficient parallel genetic algorithms : theory and practice. *Computer methods in applied mechanics and engineering* 186 (2000), 221–238.
 - [17] CHUNG, K.-H., AND YANG, W.-H. A study on the fatigue crack growth behavior of thick aluminium panels repaired with a composite patch. *Composite Structures* 60 (2003), 1–7.
 - [18] COLEMAN, T., AND LI, Y. On the convergence of reflective newton methods for large-scale nonlinear minimization subject to bounds. *Mathematical Programming* 67, 2 (1994), 189–224.
 - [19] COLOMBI, P., BASSETTI, A., AND NUSSBAUMER, A. Delamination effects on cracked steel members reinforced by prestressed composite patch. *Theoretical and applied fracture mechanics* 39 (2003), 61–71.
 - [20] DARWIN, C. *The origin of species*. [http ://etext.library.adelaide.edu.au/d/d22o/](http://etext.library.adelaide.edu.au/d/d22o/), 1859.
 - [21] DAVIS, M., AND BOND, D. Principles and practices of adhesive bonded structural joints and repairs. *International Journal of Adhesion and Adhesives* 19 (1999), 91–105.
 - [22] DE OLIVEIRA, A. C. M., AND LORENA, L. A. N. Real-coded evolutionary approaches to unconstrained numerical optimization. In *LAPTEC 2002* (Sao Paulo, 2002).
 - [23] DUFORT, L., GRÉDIAC, M., AND SURREL, Y. Experimental evidence of the cross-section warping in short composite beams under three point bending. *Composite Structures* 51 (2001), 37–47.
 - [24] DUONG, C., HART-SMITH, L., AND YU, J. Analytical approach to bonded repair of elliptical dent, corrosion grind-out, and cut-out. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 36 (2001), 187–193.

-
- [25] DUONG, C., AND YU, J. An analytical estimate of thermal effects in a composite bonded repair : plane stress analysis. *International Journal of Solids and Structures* 39 (2002), 1003–1014.
 - [26] FINDINK, F., MRAD, N., AND JOHNSTON, A. Strain monitoring in composite patched structures. *Composite Structures* 49 (2000), 331–338.
 - [27] GAY, D. *Matériaux composites*. Hermes, 1997.
 - [28] GILIBERT, Y. Le comportement mécanique fin d’un assemblage collé. *Matériaux et Techniques*, 3 (1991).
 - [29] GOLAND, AND REISSNER. The stress in cemented joints. *Journal of Applied Mechanics* 11 (1944), A17–A27.
 - [30] GORANSON, U. G. Fatigue issues in aircraft maintenance and repairs. *Int. J. Fatigue* 20, 6 (1997), 413–431.
 - [31] GOULIOS, G., AND MARIOLI-RIGA, Z. Composite patch repairs for commercial aircraft : Compres. *Air and Space Europe* 3 (2001), 143–147.
 - [32] GRÉDIAC, M., PIERRON, F., AND SURREL, Y. Novel procedure for complete in-plane composite characterization using a T-shaped specimen. *Experimental Mechanics* 39, 2 (1999), 142–149.
 - [33] GÜRDAL, Z., HAFTKA, R. T., AND HAJELA, P. *Design and Optimization of Laminated Composite Materials*. J. Wiley and Sons New York, 1999.
 - [34] HART-SMITH, L. Adhesive-bonded double-lap joints. Tech. Rep. CR-112235, NASA, 1973.
 - [35] HART-SMITH, L. Adhesive-bonded single-lap joints. Tech. Rep. CR-112236, NASA, 1973.
 - [36] HART-SMITH, L. A peel-type durability test coupon to assess interfaces in bonded, co-bonded, and co-cured composite structures. *International Journal of Adhesion and Adhesives* 19 (1999), 181–191.
 - [37] HEIMERDINGER, B., RATWANI, M. M., AND RATWANI, N. M. Influence of composite repair patch dimensions on crack growth life of cracked metallic structures. *Conference on Aging Aircraft* (1999).
 - [38] HOLLAWAY, L., AND LEEMING, M. *Strengthening of reinforced concrete structures*. Woodhead Publishing Limited, 1999.
 - [39] HUANG, H., AND YANG, C. Elastic-plastic model of adhesive-bonded composite joints. Tech. rep., Wichita State University.
 - [40] IMAM, M. H., AND AL-SHIHRI, M. A. A primitive crossover for improving the reliability of genetic algorithms for structural optimization. In *Computational engineering using metaphors from nature* (Edinburgh, 2000), B. Topping, Ed., Civil-Comp Press, pp. 91–97.

-
- [41] JENKINS, W. M. On the application of natural algorithms to structural design optimization. *Engineering structures* 19, 4 (1997), 302–308.
 - [42] KIM, H., AND KEDWARD, K. Stress analysis of in-plane, shear-loaded, adhesively bonded composite joints and assemblies. Tech. Rep. DOT/FAA/AR-01/7, Federal Aviation Administration, 2001.
 - [43] KOGISO, N., WATSON, L. T., GÜRDAL, Z., AND HAFTKA, R. T. Genetic algorithms with local improvement for composite laminate design. *Structural Optimization* 7 (1994), 207–218.
 - [44] KOGISO, N., WATSON, L. T., GÜRDAL, Z., HAFTKA, R. T., AND NAGENDRA, S. Design of composite laminates by a genetic algorithm with memory. *Mechanics of composite materials and structures* 1 (1994), 95–117.
 - [45] KRADINOV, V., HANAUSKA, J., BARUT, A., MADENCI, E., AND AMBUR, D. Bolted patch repair of composite panels with a cutout. *Composite Structures* 56 (2002), 423–444.
 - [46] KUMAR, A., AND HAKEEM, S. Optimum design of symmetric composite patch repair to centre cracked metallic sheet. *Composite Structures* 49 (2000), 285–292.
 - [47] LENA, M., KLUG, J., AND SUN, C. Composites patches as reinforcements and crack arrestors in aircraft structures. *Journal of Aircraft* 35, 2 (1998), 318–323.
 - [48] LI, G., LEE-SULLIVAN, P., AND THRING, R. W. Nonlinear finite element analysis of stress and strain distributions across the adhesive thickness in composite single-lap joints. *Composite Structures* 46 (1999), 395–403.
 - [49] LIN, C. Y., AND HAJELA, P. Genetic algorithms in optimization problems with discrete and integer design variables. *Engineering optimization* 19 (1992), 309–327.
 - [50] MAGNIN, V. *Optimisation - Cours sur les algorithmes génétiques*. <http://www.eudil.fr/>
 - [51] MARIOLI-RIGA, Z., TSAMASPHYROS, G., AND KANDERAKIS, G. Design of emergency aircraft repairs using composite patches. *Mechanics of composite materials and structures* 8 (2001), 199–204.
 - [52] MATHIAS, J.-D., BALANDRAUD, X., AND GRÉDIAC, M. Applying a genetic algorithm to the optimization of composite patches. *Computers and Structures* (2004), soumis.
 - [53] MATHIAS, J.-D., BALANDRAUD, X., AND GRÉDIAC, M. Closed-form solutions for the bidirectional stress distribution in rectangular bonded composite patches. *International Journal of Solids and Structures* (2005), soumis.

-
- [54] MATHIAS, J.-D., BALANDRAUD, X., AND GRÉDIAC, M. Experimental investigation of composite patches with a full-field measurement method. *Composite Part A* (2005), accepté.
 - [55] MOOSBURGER, R., KOSTRZEWA, C., FISCHBECK, G., AND PETERMANN, K. Shaping the digital optical switch using evolution strategies and bpm. *IEEE Photonics Technology Letters* 9, 11 (1997), 1484–1486.
 - [56] ONG, C., CHU, R., KO, T., AND SHEN, S. Composite patch reinforcement of cracked aircraft upper longeron : analysis and specimen simulation. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 14 (1990), 13–26.
 - [57] ONG, C., AND SHEN, S. Some results on metal and composite patch reinforcement of aluminium honeycomb panel. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 16 (1991), 145–153.
 - [58] OPLINGER, D. Effects of adherent deflection in single lap joints. *International Journal of Solids and Structures* 31, 18 (1994), 2565–2587.
 - [59] PEDERSEN, P. On sensitivity analysis and optimal design of specially orthotropic laminates. *Engineering optimization* 11 (1987), 305–316.
 - [60] PELIKAN, M., SASTRY, K., AND GOLDBERG, D. E. Scalability of the bayesian optimization algorithm. *International Journal of Approximate Reasoning* 31 (2002), 221–258.
 - [61] PERRUCHET, C., AND PRIEL, M. *Estimer l'incertitude*. AFNOR, 2000.
 - [62] PETERSON, R. *Stress concentration factors*. John Wiley and sons, 1974.
 - [63] PIERRON, F., ALLOBA, E., SURREL, Y., AND VAUTRIN, A. Whole-field assessment of the effects of boundary conditions on the strain field in off-axis tensile testing of unidirectional composites. *Composites Science and Technology* 58 (1998), 1939–1947.
 - [64] PIRO, J., AND GRÉDIAC, M. Producing and transferring low-spatial-frequency grids for measuring displacement fields with moiré and grid methods. *Experimental Techniques* 28, 4 (2004), 23–26.
 - [65] PROVINI, H. *Algorithme génétique*. [http ://membres.lycos.fr/herveprovini /presentationmusiques.html](http://membres.lycos.fr/herveprovini/presentationmusiques.html), 2004.
 - [66] QIN, M., AND DZENIS, Y. A. Analysis of single lap adhesive composite joints with delaminated adherends. *Composites : Part B* 34 (2003), 167–173.
 - [67] QUINSAT, Y. *Optimisation multi-critère par les algorithmes génétiques*. Mémoire de D.E.A., LaRAMA Université Blaise-Pascal, 2001.
 - [68] RAJEEV, S., AND KRISHNAMOORTHY, . S. Discrete optimization of structures using genetic algorithms. *Journal of structure engineering* 118 (1992), 1233–1250.

-
- [69] REINEIX, A., ECLERCY, D., AND JECKO, B. Fdtd/genetic algorithm coupling for antennas optimization s. *Annales de Télécommunications* 52, 9-10 (1997).
 - [70] RICHE, R. L. *Optimisation of composite structures by genetic algorithms*. PhD thesis, Virginia institute and state university, 1994.
 - [71] RICHE, R. L., AND CAILLETAUD, G. A mixed evolutionary/heuristic approach to shape optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 41 (1998), 1463–1484.
 - [72] RICHE, R. L., AND HAFTKA, R. T. Improved genetic algorithm for minimum thickness composite laminate design. *Composites Engineering* 5, 2 (1995), 143–161.
 - [73] SEO, D.-C., AND LEE, J.-J. Fatigue crack growth behavior of cracked aluminium plate repaired with composite patch. *Composite Structures* 57 (2002), 323–330.
 - [74] SEO, D.-C., LEE, J.-J., AND JANG, T. S. Comparison of fatigue crack growth behavior of thin and thick aluminium plate with composite patch repair. *International Conference on Composite Materials, Serial. 13th, Beijing, China* (2001).
 - [75] SIERRA-RUIZ, V., DESTREBECQ, J.-F., AND GRÉDIAC, M. The transfer length in concrete structures reinforced with composite materials : a survey of somme analytical models and simplifeid approaches. *Composite Structures* 55, 4 (2002), 445–454.
 - [76] SURREL, Y. Moiré and grid methods in optics : a signal-processing approach. In *Interferometry '94 : Photomechanics, Proceedings of the SPIE* (1994), J. Pryputniewicz and J. Stupnicki, Eds., vol. 2342, pp. 213–220.
 - [77] SURREL, Y. Méthodes optiques pour la mesure de champs cinématiques : résolution et résolution spatiale. In *quinzième Congrès Français de Mécanique Avancée* (3), Nancy, Ed., p. 6 pages.
 - [78] SYSWERDA, G. Uniform crossover in genetic algorithms. In *Proceeding of the third international conference on genetic algorithms and their application* (San Mateo, 1989), Morgan Kaufman Publishers, pp. 2–9.
 - [79] TAY, T. E., CHAU, F. S., AND ER, C. J. Bonded boron-epoxy composite repair and reinforcement of cracked aluminium stuctures. *Composite Structures* 34 (1996), 339–347.
 - [80] TODOROKI, A., AND HAFTKA, R. T. Stacking sequence optimization by a genetic algorithm with a new recessive gene like repair strategy. *Composites : Part B* 29 (1998), 277–285.

-
- [81] TOMBLIN, J., HARTER, P., SENEVIRATNE, W., AND YANG, C. Characterization of bondline thickness effects in adhesive joints. *Journal of Composite Technology and Research* 24, 2 (2002), 80–92.
 - [82] TOURISM, L. *Patrouille de France*. <http://www.lugano-tourism.ch/airshow/>, 2004.
 - [83] TOUSSAINT, E., DESTREBECQ, J., AND GRÉDIAC, M. A detailed study of crack propagation in cement-based fibre composite beams under bending. *Cement and Concrete Composites* 27, 3 (2005), 399–411.
 - [84] TSAI, M. Y., AND MORTON, J. The effect of a spew fillet on adhesive stress distributions in laminated composite single-lap joints. *Composite Structures* 32 (1995), 123–131.
 - [85] TSAI, M. Y., AND MORTON, J. An experimental investigation of nonlinear deformations in single-lap joints. *Mechanics of materials* 20 (1995), 183–194.
 - [86] TSAI, M. Y., OPLINGER, D. W., AND MORTON, J. Improved theoretical solutions for adhesive lap joints. *International Journal of Solids and Structures* 35, 12 (1998), 1163–1185.
 - [87] TSAI, S., AND HAHN, H. *Introduction to composite materials*. Technomic, 1980.
 - [88] TSAMASPHYROS, G., KANDERAKIS, G., KARALEKAS, D., RAPTIS, D., GDOUTOS, E., ZACHAROPOULOS, D., AND MARIOLI-RIGA, Z. Study of composite patch repair by analytical and numerical methods. *Fatigue Fract Engng Mater Struct* 24 (2001), 631–636.
 - [89] TSE, P.-C., LAU, K.-J., AND WONG, W.-H. Stress and failure analysis of woven composite plates with adhesive patch-reinforced circular hole. *Composites : Part B* 33 (2002), 57–65.
 - [90] TSUTSUI, S., AND GOLDBERG, D. E. Search space boundary extension method in real-coded genetic algorithms. *Information Sciences* 133 (2001), 229–247.
 - [91] VOLKERSEN, O. Die niekraft in zugbeanspruchten mit konstanten laschenquerschnitten. *Luftfahrtforschung* 15 (1938), 41–47.
 - [92] WANG, C. H., ROSE, L. R. F., CALLINAN, R., AND BAKER, A. A. Thermal stresses in a plate with a circular reinforcement. *International Journal of Solids and Structures* 37 (2000), 4577–4599.
 - [93] WEBER, B., KENMEUGNE, B., CLEMENT, J. C., AND ROBERT, J. L. Improvements of multiaxial fatigue criteria computation for a strong reduction of calculation duration. *Computational Materials Science* 15 (1999), 381–399.
 - [94] XIONG, Y., AND RAIZENNE, D. Stress and failure analysis of bonded composite-to-metal joints. Tech. rep., Institute for aerospace research, Canada.